Cálculo 1

Grado en Matemática Aplicada

PhD. Thomas Ian Ashley
Departamento de Métodos Cuantitativos

Universidad LOYOLA

Índice general

I Tema 1 - Sucesiones y series numéricas

II Tema 2 - Límites y Continuidad

III Tema 3 - Diferenciación

Tema 1 - Sucesiones y series numéricas

part.1

chapter.2section.2.1subsection.2.1.1subsection.2.1.2subsection.2

1. Sucesiones y series numéricas

1.1 Sucesiones numéricas

Definición 1.1.1 — Sucesión numérica.
Una sucesión de números reales a_n es una aplicación que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real:

$$a_n : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

donde n es el **índice** de cada elemento.

■ Ejemplo 1.1
La sucesión

$$a_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$$

tiene elementos:
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, \dots$

■

1.1.1 Representación gráfica

La representación gráfica de una sucesión numérica puede ayudar en el análisis de su comportamiento, cuando consideramos valores de n llegando a cierto valor o hasta infinito.

■ Ejemplo 1.2
La sucesión $c_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$:

$$c_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

se puede representar por la gráfica

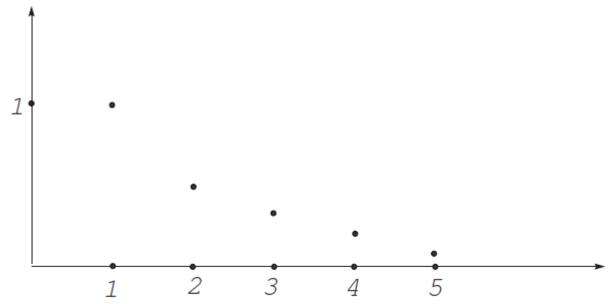


Figura 1.1: Sucesión numérica - gráfica

o también por una linea recta

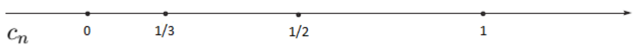


Figura 1.2: Sucesión numérica - linea recta

■

1.1.2 Sucesiones recurrentes

Los ejemplos anteriores definen una sucesión numérica atreves de una regla basada en los índices de los elementos (n, $\frac{1}{n}$ etc) o directamente definiendo la sucesión de números.

Otra forma de definir una sucesión utilice elementos anteriores de la misma sucesión para definir las siguientes. Este tipo de sucesión se llama una **sucesión recurrente.**

■ Ejemplo 1.3
La sucesión recurrente definida por la relación

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad a_1 = 1, a_2 = 1 \;\; n = 3, 4, \ldots$$

tiene elementos $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$. ■

1.1.3 Cotas

Definición 1.1.2 — Cota superior.
Una sucesión está **acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M \;\; \forall n$. En tal caso, se dirá que M es una cota superior de a_n.

■ Ejemplo 1.4
La sucesión

$$b_n = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

tiene cota superior, o esta **acotada superiormente**, por los números 1,2,3,4,.... ■

Definición 1.1.3 — Cota inferior.
Una sucesión está **acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m \;\; \forall n$. En tal caso, se dirá que m es una cota inferior de a_n.

■ **Ejemplo 1.5**
La sucesión
$$a_n = \frac{n+1}{n} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\}$$
tiene cota inferior, o esta **acotada inferiormente**, por los números -2,-1,0,1,.... ■

Definición 1.1.4 — Sucesión acotada.
Una sucesión a_n está acotada si $\exists\, m_0, M_0 \in \mathbb{R} : m_0 \leq a_n \leq M_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es decir, una sucesión está acotada si está acotada superiormente e inferiormente.

■ **Ejemplo 1.6**
La sucesión
$$a_n = \frac{4-3n}{n^2}$$

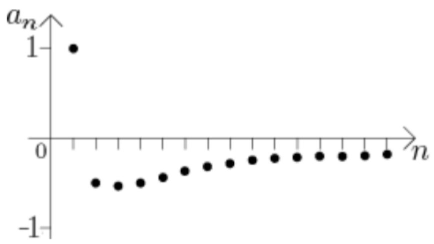


Figura 1.3: Sucesión acotada

tiene cota inferior -1 y cota superior 1, entonces es una sucesión acotada. ■

Para demostrar (matemáticamente) que una sucesión está acotada, hay que comprobar que $\exists\, m_0, M_0 \in \mathbb{R} : m_0 \leq a_n \leq M_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Consideramos tres métodos:

- Álgebra
- Cotas conocidas
- Inducción

Álgebra

Usando la ecuación que define la sucesión, y definiciones de álgebra conocidas, es posible demostrar la existencia de cotas de una sucesión.

■ **Ejemplo 1.7**
Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ tiene cota superior.

En este caso, empezamos comparando el numerador y denominador del cociente. Podemos afirmar que $n < n+1 \quad \forall n$.
Entonces, si dividimos la desigualdad ($n \geq 1$) tenemos $\dfrac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n$. Es decir:
$$a_n < 1 \quad \forall n$$
■

■ **Ejemplo 1.8**
Demostrar que la sucesion $b_n = 3 - \frac{5}{n}$ está acotada.

Sabemos que para $n \in \mathbb{N}^+$ tenemos $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Si multiplicamos por -5 y sumamos 3, tenemos el resultado. ■

Cotas conocidas

Muchas funciones elementales tienen cotas conocidas que podemos usar para demostrar las cotas de funciones parecidas. Este método es útil cuando la sucesión está definida por funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas etc.

■ **Ejemplo 1.9**
Acotar la sucesión definida por $a_n = sen\left(\frac{n^2+1}{3n^2+4n+5}\right)$.
Por definición, sabemos que la función $sen(x)$ está acotada entre -1 y 1. También sabemos que un cambio a la variable x (por ejemplo a $4x$) provoca una cambio en la frecuencia de la función, pero no en la amplitud. Entonces la función sigue siendo acotada entre -1 y 1. ■

■ **Ejemplo 1.10**
Demostrar que la sucesión $c_n = 5 + 4\cos(n)$ está acotada.

Sabemos que $0 \leq \cos(n) \leq 1 \;\; \forall n$. Entonces multiplicando por 4 y sumando 5 nos da el resultado deseado. ■

Inducción

Una prueba por inducción es una forma rigorosa para demostrar que una proposición es cierta para todos los números naturales. La prueba esta formada por tres pasos:

Base Demostrar que la proposición es cierta para $n = 1$. **Nota:** No tiene que ser 1. Podría ser cualquier valor.
Suposición Suponer que la proposición es cierta para $n = k$.
Paso inductivo Demostrar que la proposición es cierta para $n = k + 1$.

■ **Ejemplo 1.11**
Demostrar que la sucesión definida por $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, a_1 = 0$ está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$.

Comprobamos esta proposición usando Inducción:

Base Demostrar que la proposición es cierta para $n = 1$.

Cuando $n = 1$, $a_1 = 0$. Entonces es cierto que $a_1 < \frac{1}{2}$.

Suposición Suponer que la proposición es cierta para $n = k$.

Suponemos que $a_k < \frac{1}{2}$ por $k \in \mathbb{N}$.

Paso inductivo Demostrar que la proposición es cierta para $n = k + 1$.
Intentamos demostrar que $a_{k+1} < \frac{1}{2}$ por todo $n = k$, donde $a_{k+1} = a_k^2 + \frac{1}{4}$.

Sabemos que $a_k < \frac{1}{2}$. Entonces $a_k^2 < \frac{1}{4}$. Por lo tanto $a_{k+1} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

■

■ **Ejemplo 1.12**
Demuestra que la sucesión definida por $a_n = \frac{4-3n}{n^2}, n = 1,2,3,\ldots$ está acotada superiormente por 1.

Comprobamos esta proposición usando Inducción:

Base Demostrar que la proposición es cierta para $n = 1$.

Cuando $n = 1$, $a_1 = 1$. Entonces es cierto que $a_1 \leq 1$.

Suposición Suponer que la proposición es cierta para $n = k$.

Suponemos que $a_k \leq 1$ por $k \in \mathbb{N}$.

Paso inductivo Demostrar que la proposición es cierta para $n = k+1$. Tenemos $a_{k+1} = \dfrac{4-3(k+1)}{(k+1)^2}$.

Queremos demostrar que $a_{k+1} \leq 1$. Usando su definición:

$$\frac{4-3(k+1)}{(k+1)^2} \leq 1 \;\forall k$$
$$4-(3k+1) \leq (k+1)^2 \quad \text{porque } \; k \in \mathbb{N} \Rightarrow (k+1)^2 > 0$$
$$1-3k \leq k^2+2k+1 \;\forall k$$
$$0 \leq k^2+5k.$$

Esto es cierto $\forall k$, entonces nuestra suposición es cierta.

■

■ **Ejemplo 1.13**
$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$. Demostrar por inducción que $x_n < 4 \;\forall n$.

Base: $x_1 = 1$. Suposición: $x_k < 4$. Inductivo: Tenemos $x_{k+1} = \sqrt{1+2x_k}$ Si $x_k < 4$ entonces $x_{k+1} < 3$. Por lo tanto $x_n < 4 \;\; \forall n$. ■

1.1.4 Ínfimo y Supremo

El **ínfimo** de una sucesión es la mayor de las cotas inferiores, o en otras palabras, es el máximo del conjunto de las cotas inferiores
Una cota inferior m_0 es el **ínfimo** de una sucesión a_n si:

$$m_0 \geq m \quad \forall m \text{ cota inferior de la sucesión } a_n$$

Se denota:

$$m_0 = inf(a_n)$$

El **supremo** de una sucesión es la menor de las cotas superiores, o en otras palabras, es el mínimo del conjunto de las cotas superiores
Una cota superior M_0 es el **supremo** de una sucesión a_n si:

$$M_0 \leq M \quad \forall M \;\text{ cota superior de la sucesión } a_n$$

Se denota:

$$M_0 = sup(a_n)$$

Teorema 1.1.1 — Unicidad del supremo.
Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene supremo $S \in \mathbb{R}$, es único.

Demostración 1.1
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Suponemos que la sucesión tiene dos supremos b y c.

Si c es un supremo, es una cota superior para $\{a_n\}$. Si b es un supremo, es el menor de las cotas superiores de $\{a_n\}$, entonces $b \leq c$. De manera similar, si b es un supremo, es una cota superior de $\{a_n\}$. Si c es un supremo, es el menor de las cotas superiores, entonces $c \leq b$.

Si $b \leq c$ y también $c \leq b$, entonces $b = c$. Si el supremo existe, es único. ■

1.1.5 Sucesiones Monótonas

Definición 1.1.5
Una sucesión a_n es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

■ **Ejemplo 1.14**
La sucesión

$$a_n = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Tiene elementos que siguen

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots$$

$\Rightarrow$
a_n es creciente ■

Definición 1.1.6
Una sucesión a_n es **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

■ **Ejemplo 1.15**
La sucesión

$$a_n = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$$

Tiene elementos que siguen

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$$

$\Rightarrow$
a_n es decreciente ■

Definición 1.1.7
Una sucesión a_n es **monótona** si es uno de los casos previos.

Casos especiales:

- Si $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$, a_n es **estrictamente creciente**
- Si $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$, a_n es **estrictamente decreciente**

Para demostrar si una sucesión es monótona, podemos usar su definición por tres maneras.

Diferencia Considerar la diferencia $a_{n+1} - a_n$. Si la diferencia es positiva para todo n, la sucesión es creciente.

■ **Ejemplo 1.16**
Sea $a_n = n^2$.

Tenemos $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2$
$a_{n+1} - a_n = 2n+1$
$2n+1 > 0 \; \forall n$.
$\Rightarrow a_n$ es creciente. ■

Lógica Usar la lógica para enseñar que $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n$, o bien que $m \geq n \Rightarrow a_m \geq a_n$

■ **Ejemplo 1.17**
Sea $a_n = r^n, r > 1$.
Tenemos,
$a_{n+1} = r^{n+1}$
$a_{n+1} = r \cdot r^n$
$a_{n+1} = r \cdot a_n$
$\Rightarrow a_n$ es creciente. ■

Cociente Considerar el ratio a_{n+1}/a_n. Si es mayor que 1 para todo n y a_n positivo para todo n, entonces a_n es creciente.

■ **Ejemplo 1.18**
Sea $a_n = \frac{n}{n+1}$.
Tenemos que $a_n > 0 \; \forall n$ y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow a_n$ es creciente ■

■ **Ejemplo 1.19**
Sea $b_n = n^2, n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2+2n+1}{2n} = 1 + \frac{2}{n}\frac{1}{n} > 1 \; \forall n.$$

Entonces b_n creciente. ■

■ **Ejemplo 1.20**
Sea $c_n = n!, n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = n+1 > 1 \; \forall n.$$

Entonces c_n creciente. ■

1.1.6 Límites de sucesiones

Definición 1.1.8
Una sucesión a_n es **convergente** si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0$ se puede

encontrar un número natural $N(\varepsilon) > n$ tal que:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

También escrito:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N,\ |a_n - L| < \varepsilon$$

L se llama el **límite** de la sucesión, y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

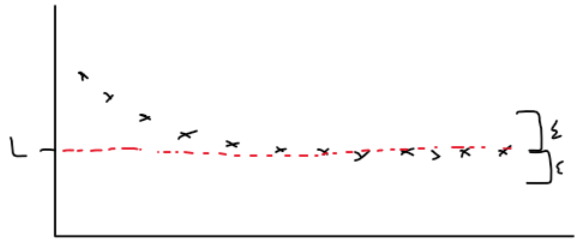


Figura 1.4: Límite de una sucesión

La definición del límite es fundamental en la demostración de muchos teoremas, pero también es útil para encontrar o comprobar límites.

■ **Ejemplo 1.21**
Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{2}{n^2}\right) = 4$.

Aplicando la definición del límite de una sucesión:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N,\ |a_n - L| < \varepsilon$$

Tenemos

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$\left|4 + \frac{2}{n^2} - 4\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{2}{n^2}\right| < \varepsilon$$

$n > 0 \quad \forall n.$
$\Rightarrow$

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon$$
$$n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

$\varepsilon > 0$, así que si elegimos $M = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right],\ \ n > M \ \ \forall n$
$\Rightarrow$
$L = 4$. ■

Definición 1.1.9
Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite se denomina **convergente**, y si no tiene límite o es infinito, se llama **divergente**

Definición 1.1.10
Si una sucesión no es convergente ni divergente, se denomina **sucesión oscilante**

■ **Ejemplo 1.22**
La sucesión $a_n = \{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,...\}$

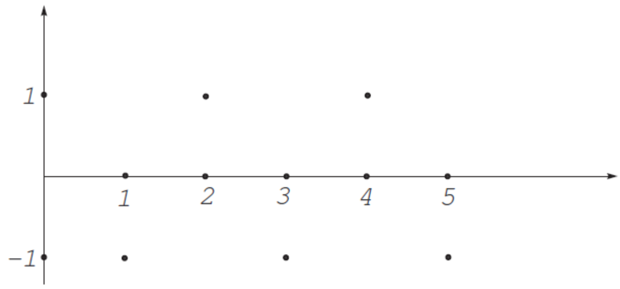


Figura 1.5: Sucesión Oscilante

es una sucesión oscilante ■

■ **Ejemplo 1.23**
Calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + 1$. $\rightarrow$ convergente. ■

■ **Ejemplo 1.24**
Calcular el límite de la sucesión $b_n = n^{10} - n^8 - n^6$. $\rightarrow$ divergente. ■

■ **Ejemplo 1.25**
Calcular el límite de la sucesión $c_n = \frac{5n+3}{n+4} + \frac{3n^2-7}{n^2+8}$. $\rightarrow$ convergente. ■

■ **Ejemplo 1.26**
Calcular el límite de la sucesión $d_n = cos(n)$. $\rightarrow$ oscilante. ■

■ **Ejemplo 1.27**
Calcular el límite de la sucesión $e_n = e^n$. $\rightarrow$ divergente. ■

Teorema 1.1.2 — Unicidad del Límite.
Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente, y sean $b,c \in \mathbb{R}$ tales que $b = \lim_{n\to\infty} a_n$, $c = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces $b = c$.

Demostración 1.2 Unicidad del límite
Deja que

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$l_2 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

y suponemos que $l_1 \neq l_2$.

Elegimos $\varepsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$

Desde la definición del límite tenemos:

$$|a_n - l_1| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1$$

$$|a_n - l_2| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2$$

Para asegurar las dos desigualdades, elegimos $n' > max\{N_1, N_2\}$
$\Rightarrow$

$$|a_{n'} - l_1| < \varepsilon$$

$$|a_{n'} - l_2| < \varepsilon$$

Empezando desde la diferencia entre los límites l_1, l_2 y sumando $a_{n'} - a_{n'}$:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 + a_{n'} - a_{n'} - l_2|$$

Usando la desigualdad triangular $|x+y| \leq |x| + |y|$:

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_{n'}| + |a_{n'} - l_2|$$

$$|l_1 - l_2| < \varepsilon + \varepsilon$$

Por nuestra definición de ε:

$$|l_1 - l_2| < \frac{1}{2}|l_1 - l_2| + \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$$

$$|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

Esto es una contradicción $\Rightarrow l_1 = l_2$. ■

Teorema 1.1.3 — Teorema de Convergencia Monótona.
Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente.

Implicaciones:

- Si a_n es creciente: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$
- Si a_n es decreciente: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$

Importante Una sucesión convergente $\not\Rightarrow$ monótona y acotada.

Demostración 1.3
Consideremos una sucesión $\{a_n\}$, la cual supondremos creciente y acotada superiormente (el caso para una sucesión decreciente resulta ser análogo). El supremo de la sucesión, S, tiene dos propiedades:

- $a_n \leq S \quad n \in \mathbb{N}$.
- Para $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ no es cota superior, entonces $\exists N \in \mathbb{N} \mid S - \varepsilon \leq a_N$.

La sucesión es creciente, entonces por todo $n \geq N$:

$$S - \varepsilon \leq a_N \leq a_n$$

Usando la primera propiedad del supremo:

$$S - \varepsilon \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$$

Entonces,

$$|a_n - S| < \varepsilon \qquad (|x-a| \leq \rightarrow \ a-b \leq x \leq a+b)$$

Lo cual es la definición del límite de la sucesión, con $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. ■

■ **Ejemplo 1.28**

Si la sucesión $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, a_1 = 0$ está acotada superiormente y es creciente, encuentra su límite.

Por ser una sucesión acotada superiormente y creciente, el teorema de convergencia monótona nos dice que es convergente. Es decir, $\exists L : \lim_{n\to\infty} a_n = L$. Por lo tanto, tenemos $L = L^2 + \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ L = \frac{1}{2}$.
■

Teorema 1.1.4 — Teorema del Sandwich. Si tenemos tres sucesiones a_n, b_n, c_n donde $a_n \leq b_n \leq c_n$ y $\exists L : \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Definición 1.1.11

Sean s_n, t_n sucesiones convergentes con límites:

$$a = \lim_{n\to\infty} s_n$$
$$b = \lim_{n\to\infty} t_n$$

y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $s_n + t_n$ es convergente y tiene límite $a+b$.
- cs_n es convergente y tiene límite ca.

Demostración 1.4

Sea $\varepsilon > 0$. Si $s_n + t_n$ es convergente y tiene límite $a+b$, por la definición del límite buscamos:

$$|s_n + t_n - a - b| < \varepsilon.$$

Si s_n es convergente, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N_1$:

$$|s_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si t_n es convergente, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N_2$:

$$|t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si elegimos $N = max\{N_1, N_2\}$ y deja que $n > N$, sumando las desigualdades nos da:

$$|s_n - a| + |t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por la desigualdad triangular:

$$|s_n - a + t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|s_n - a + t_n - b| < \varepsilon$$

$$|s_n + t_n - a - b| < \varepsilon$$

Entonces por la definición del límite, queda demostrado que $s_n + t_n$ es convergente y tiene límite $a + b$.

■ **Ejemplo 1.29**
Calcular el límite de la siguiente sucesión, usando el teorema de Sandwich.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n}$$

Sabemos que la función $sen(n)$ está acotada entre -1 y 1. Entonces:

$$-1 \leq sen(n) \leq 1 \quad \forall n$$
$$\frac{-1}{n} \leq \frac{sen(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

Vemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$. Por lo tanto, por el teorema de Sandwich, $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n} = 0$.
■

Definición 1.1.12
Sean s_n, t_n sucesiones convergentes con límites:

$$a = \lim_{n\to\infty} s_n$$
$$b = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Entonces $s_n \cdot t_n$ es convergente y tiene límite $a \cdot b$

Demostración 1.5 Sea $\varepsilon > 0$. Si $s_n \cdot t_n$ es convergente y tiene límite $a \cdot b$, por la definición del límite buscamos:

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| < \varepsilon.$$

Trabajo Sucio
Empezando desde la definición que buscamos:

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| < \varepsilon.$$

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| = |s_n \cdot t_n - at_n + at_n - a \cdot b|$$

Por la desigualdad triangular:

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| \leq |t_n||s_n - a| + |a||t_n - b|$$

Suponemos que $|t_n||s_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|a||t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Fin de Trabajo Sucio

Si t_n es una sucesión convergente, es acotada. $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ tal que $|t_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Si elegimos M grande, también podemos decir $|M| > |a|$.
Tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n = a \quad &\Rightarrow \quad \exists N_1 \;\; | \;\; |s_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq N_1 \\
\lim_{n\to\infty} t_n = b \quad &\Rightarrow \quad \exists N_2 \;\; | \;\; |t_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq N_2
\end{aligned}$$

Elegimos $N = max\{N_1, N_2\}$. Entonces por $n > N$, usando el trabajo sucio:

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| \leq |t_n||s_n - a| + |a||t_n - b|$$

Si $|t_n| < M$ y $|a| < M$,

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| \leq M|s_n - a| + M|t_n - b|$$

Desde las definiciones de las sucesiones convergentes,

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|s_n \cdot t_n - a \cdot b| \leq \varepsilon$$

Entonces por la definición del límite, queda demostrado:

$$\lim_{n\to\infty} s_n t_n = ab. \tag{1.1}$$

■

1.1.7 Órdenes de infinitud

- n^n crece más rápido que $n!$.
- $n!$ crece más rápido que a^n con $a > 1$.
- a^n crece más rápido que n^k. donde $k \in \mathbb{N}$.
- Un polinomio crece según su orden más alto.
- $log(n) < n < a^n < n! < n^n$.

1.2 Series numéricas

1.2.1 Definiciones

Recuerda la definición de una sucesión:

Def: Una sucesión de números reales a_n es una aplicación que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ un número real.

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Definición 1.2.1
Una serie infinita es la suma de todos los términos de una sucesión.

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

■ **Ejemplo 1.30**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

■

Definición 1.2.2
Los primeros N elementos de la serie se llama la **suma parcial** S_N

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_N$$

■ **Ejemplo 1.31**
Sea una serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 2 \\ S_3 &= 1 + 2 + 3 \\ S_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 \end{aligned}$$

■

1.2.2 Convergencia

Definición 1.2.3
Si la sucesión de las sumas parciales converge a S, se dice que la serie es convergente, y su suma es S: Si $\exists S$ tal que $\lim_{N\to\infty} S_N = S \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

■ **Ejemplo 1.32**
Buscamos la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$$

Las sumas parciales son:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1/2 \\ S_2 &= 1/2+1/4 \\ S_3 &= 1/2+1/4+1/8 \\ S_N &= 1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^N \end{aligned}$$

El n-esimo elemento de la sucesión de sumas parciales se puede escribir como:

$$1-\frac{1}{2^N}$$

El límite de esta sucesión es:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}(S_N) &= \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^N}\right) \\ \lim_{N\to\infty}(S_N) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces la suma de la serie infinita a_n es 1. ■

Definición 1.2.4
Si la sucesión de las sumas parciales es divergente u oscilante, se dice que la serie es **divergente** u **oscilante**.

■ **Ejemplo 1.33**
Consideremos la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

con sucesión de sumas parciales:

$$S_N = \{-1,0,-1,0,-1,\dots\}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N?$$

El límite de la sucesión de sumas parciales no existe, por ser una sucesión oscilante.
$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ \text{Divergente}$$

■

Definición 1.2.5 Condición necesaria de convergencia
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, o tiene un valor diferente que 0, la serie diverge.

Importante Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, **no** podemos decir la serie converge.

Demostración 1.6
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L, \text{ y } \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = L - L = 0$$

Las sumas parciales son:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

Entonces,

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

■

■ **Ejemplo 1.34**
Consideremos la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

divergente. ■

Definición 1.2.6 Sucesión Nula
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la sucesión $\{a_n\}$ se llama una sucesión **nula**.

1.2.3 Propiedades

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series infinitas con sumas A y B respectivamente, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces,

Multiplicar $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$

Sumar $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

Restar $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Demostración 1.7

Multiplicar Demostramos la suma por la propiedad de multiplicar por un constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Las sumas parciales de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ son:

$S'_1 = \lambda a_1$
$S'_2 = \lambda a_1 + \lambda a_2$
$S'_3 = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3$
$S'_N = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + ... + \lambda a_N$

Entonces,

$S'_N = \lambda (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N)$
$S'_N = \lambda S_N$
$\Rightarrow$

$$\lim_{N\to\infty} S'_N = \lim_{N\to\infty} \lambda S_N$$

Por definición,
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$

$\Rightarrow$

$\lim_{N\to\infty} S_N = A$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to\infty} \lambda S_N = \lambda \lim_{N\to\infty} S_N$.

Entonces, $\lim_{N\to\infty} S'_N = \lambda A$ y la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$.

1.2.4 Series Geométricas

Definición 1.2.7 Serie Geométrica
Una serie geométrica tiene la forma general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \tag{1.2}$$

donde $a, r \in \mathbb{R}$.

La n-esima suma parcial de la serie viene dada por la ecuación:

$$S_N = a\frac{1-r^N}{1-r}$$

Entonces la suma de la serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^N}{1-r} \tag{1.3}$$

con condición de convergencia:

Convergente $|r| < 1$
Divergente $|r| \geq 1$

Si la serie es convergente, su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \tag{1.4}$$

Demostración 1.8
La n-esima suma parcial de una serie geométrica es

$$S_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{N-1}$$

Multiplicamos por r:

$$rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^N$$

Restamos la segunda de la primera:

$$S_N - rS_N = a - ar^N$$

$$(1-r)S_N = a - ar^N$$

$$S_N = \frac{a - ar^N}{1-r}$$

Una serie es convergente si $\lim_{n\to\infty} S_N$ existe. Entonces si $|r| < 1$, el límite es convergente. ■

■ **Ejemplo 1.35**
Sea la serie a_n definida por los elementos:

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2^n}$$

Esta serie tiene la forma geométrica, con $a = 1/2$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

Tenemos $r < 1$, entonces a_n es convergente, con suma: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{a}{1-r} = 1$.

■

1.2.5 Series Telescópicas

Definición 1.2.8 Serie Telescópica
Una serie a_n es telescópica si tiene la forma general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} - b_n$$

La n-esima suma parcial de la serie viene dada por:

$$S_N = b_{N+1} - b_1$$

Entonces la suma de la serie es:

$$S = \lim_{N\to\infty} b_{N+1} - b_1$$

Demostración 1.9
Sea a_n una serie infinita que puede ser escrita en la forma $a_n = b_{n+1} - b_n$.

La n-esima suma parcial de a_n es:

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

Usando la definición de la serie:

$$S_N = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \cdots + b_{N+1} - b_N$$

$$S_N = -b_1 + b_{N+1}$$

El límite del n-esimo termino de la sucesión de sumas parciales es:

$$S = \lim_{n\to\infty} b_{N+1} - b_1$$

Si este limite existe, entonces la suma de la serie a_n es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

■ **Ejemplo 1.36**
Buscamos la suma de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Separamos el cociente en dos:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{B(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$1 = A(2n+1) + B(2n-1)$$

Si $n = \frac{1}{2}$,

$$A = \frac{1}{2}$$

Si $n = -\frac{1}{2}$,

$$B = \frac{-1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

Vemos que si $b_n = \frac{1/2}{2n-1}$, entonces $b_{n+1} = \frac{1/2}{2n+1}$

Entonces nuestra serie tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} - b_n$$

El límite de la n-esima suma parcial es

$$S = -\lim_{n\to\infty} b_{N+1} - b_1$$

$$S = -\lim_{n\to\infty} \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2(1)-1}$$

$$S = -\lim_{n\to\infty} \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1}{2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Entonces la suma de la serie infinita es $\frac{1}{2}$. ■

1.2.6 Series Aritmético-geométricas

Definición 1.2.9
Una serie aritmético-geométrica tiene la forma general:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn+d)r^n$$

donde $c, d, r \in \mathbb{R}$.

La n-esima suma parcial de una serie aritmético-geométrica es:

$$S_N = d + (c+d)r + (2c+d)r^2 + \cdots + (cN+d)r^N$$

La suma de la serie viene dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn+d)r^n = \frac{d}{1-r} + \frac{cr}{(1-r)^2}$$

con condición de convergencia:

Convergente $|r| < 1$
Divergente $|r| \geq 1$
En el caso $c = 0$, la serie es geométrica.

Demostración 1.10
Una serie aritmético-geométrica tiene la forma general:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn+d)r^n$$

La n-esima suma parcial este tipo de serie es:

$$S_N = d + (c+d)r + (2c+d)r^2 + \cdots + (cN+d)r^N$$

Juntamos términos:

$$S_N = d + dr + dr^2 + \cdots + dr^N + cr + 2cr^2 + \cdots + Ncr^N$$
$$rS_N = dr + dr^2 + dr^3 + \cdots + dr^{N+1} + cr^2 + 2cr^3 + \cdots + Ncr^{N+1}$$
$$S_N - rS_N = d - dr^{N+1} + cr + cr^2 + \cdots + cr^N - Ncr^{N+1}$$

Definimos

$$t_N = cr + cr^2 + \cdots + cr^N$$
$$t_N - rt_N = cr - cr^{N+1}$$
$$t_N = \frac{cr - cr^{N+1}}{1-r}$$

Entonces,

$$S_N - rS_N = d - dr^{N+1} + \frac{cr - cr^{N+1}}{1-r} - Ncr^{N+1}$$
$$S_N = \frac{d - dr^{N+1}}{1-r} + \frac{cr - cr^{N+1}}{(1-r)^2} - \frac{Ncr^{N+1}}{1-r}$$

Si buscamos el límite de la sucesión de sumas parciales, tomamos límites de S_N:

$$\lim_{n\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d - dr^{N+1}}{1-r} + \frac{cr - cr^{N+1}}{(1-r)^2} - \frac{Ncr^{N+1}}{1-r} \right)$$

Este límite solo converge cuando $|r| < 1$, con solución:

$$S = \frac{d}{1-r} + \frac{cr}{(1-r)^2}$$

Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (cn+d)r^n = \frac{d}{1-r} + \frac{cr}{(1-r)^2}$$

cuando $|r| < 1$. ■

■ **Ejemplo 1.37**

Buscamos la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$$

Serie aritmético-geométrica con $c = 1, d = 0, r = \frac{1}{3}$. $|r| < 1$ entonces convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(1-1/3)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

■

1.2.7 Series Hipergeométricas

Definición 1.2.10
Una serie hipergeométrica $\sum a_n$ satisface la siguiente propiedad:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \tag{1.5}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha n + \gamma > 0$. Con condición de convergencia:
Convergente $\alpha + \beta < \gamma$
Divergente $\alpha + \beta \geq \gamma$
La n-esima suma parcial de una serie hipergeométrica es:

$$S_N = \frac{\gamma(a_{N+1} - a_1) + \alpha N a_{N+1}}{\beta + \alpha - \gamma} \tag{1.6}$$

donde $\beta + \alpha - \gamma \neq 0$.
Si $\sum a_n$ es convergente, su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{-\gamma a_1}{\beta + \alpha - \gamma} \tag{1.7}$$

donde $\beta + \alpha - \gamma \neq 0$.

Demostración 1.11
Demostramos la n-esima suma parcial de una serie aritmético-geométrica, que tiene la forma general:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \tag{1.8}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \gamma \neq 0$.
Entonces,

$$a_{n+1}(\alpha n + \gamma) = a_n(\alpha n + \beta) \tag{1.9}$$

Sumamos (1.9) por n:

$$a_2(\alpha + \gamma) + \cdots + a_{n+1}(\alpha n + \gamma) = a_1(\alpha + \beta) + \cdots + a_n(\alpha n + \beta) \tag{1.10}$$

$$\alpha(a_2 + \cdots + n a_{n+1}) + \gamma(a_2 + \cdots + a_{n+1}) = \alpha(a_1 + \cdots + n a_n) + \beta(a_1 + \cdots + a_n) \tag{1.11}$$

Usando la definición de la n-esima suma parcial de $\sum a_n$, $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$:

$$\alpha(a_2 + \cdots + n a_{n+1}) + \gamma(S_N - a_1 + a_{n+1}) = \alpha(a_1 + \cdots + n a_n) + \beta S_N \tag{1.12}$$

Despejando por S_N:

$$S_N = \frac{\gamma(a_{N+1} - a_1) + \alpha N a_{N+1}}{\beta + \alpha - \gamma} \tag{1.13}$$

donde $\beta + \alpha - \gamma \neq 0$.

Tomando límites:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{\gamma(a_{N+1} - a_1) + \alpha N a_{N+1}}{\beta + \alpha - \gamma} \tag{1.14}$$

Si la serie es convergente, $\lim\limits_{N\to\infty} a_N = 0$. Entonces,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{-\gamma a_1}{\beta+\alpha-\gamma} \tag{1.15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{-\gamma a_1}{\beta+\alpha-\gamma} \tag{1.16}$$

donde $\beta+\alpha-\gamma \neq 0$. ■

■ **Ejemplo 1.38**
Buscamos la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \qquad k\in\mathbb{N}$$

Entonces tenemos:

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}}{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+k+1)}$$

Entonces $\sum a_n$ es una serie hipergeométrica con $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = k+1$.

La serie es convergente, porque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, y también $\beta+\alpha<\gamma$.

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{-(k+1)a_1}{1-k-1}$$

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\dots(1+k)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{k+1}{k(k+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}$$

■

1.2.8 Series Armónicas

Definición 1.2.11
Una serie armónica tiene la forma general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{1.17}$$

con condición de convergencia:

Convergente $p > 1$
Divergente $p \leq 1$

1.3 Convergencia

Definición 1.3.1 Convergencia absoluta
La serie infinita $\sum a_n$ es **convergente absolutamente** si $\sum |a_n|$ es convergente.
La serie infinita $\sum a_n$ convergente para que $\sum |a_n|$ es divergente se llama **convergente condicionalmente.**

Teorema 1.3.1 — Prueba de Convergencia Absoluta.
Si $\sum a_n$ es una serie convergente absolutamente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

1.3.1 Cambio de índice

A veces es necesario cambiar el primer indice de una serie (por ejemplo para usar una definición conocida).

Aquí consideramos dos métodos:

1 Podemos incluir el elemento nuevo (o perdido), y tenerlo en cuenta cuando calculamos la suma.

Ejemplo 1.39
Buscamos la suma de la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n} = \frac{7}{3}+1+\frac{11}{27}+\dots$$

una serie aritmético-geométrica, cuya definición requiere que el indice empieza por $n = 0$.

Cambiamos el indice y miramos a sus términos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n} = 5+\frac{7}{3}+1+\frac{11}{27}+\dots$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n} = -5+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n}$$

Resolvemos la nueva serie con la definición conocida, y restamos el elemento nuevo para conseguir la suma original.

■

2 Sustituimos $n = n+1$ en la definición de la serie.

Ejemplo 1.40

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2(n+1)+5)\frac{1}{3^{n+1}}$$

para cambiar $n = 0$ al original $n = 1$, hay que añadir 1. Entonces remplazamos n por $n+1$.

Ahora simplificamos la nueva serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+7)\frac{1}{3}\frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+5)\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+7}{3}\frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+7}{3}\frac{1}{3^n}=\frac{7}{3}+1+\frac{11}{27}+\dots$$

■

1.3.2 Prueba de comparación

Definición 1.3.2

Si $\exists N\in\mathbb{N}:0\leq a_n\leq b_n \quad \forall n>N$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad \text{convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{convergente} \tag{1.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{divergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad \text{divergente} \tag{1.19}$$

■ **Ejemplo 1.41**

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$$

Se puede decir que:

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ tiene forma geométrica con $r=\frac{1}{2}$. $|r|<1$, entonces la serie es convergente.

Por la prueba de comparación, si $\sum\frac{1}{2^n}$ convergente y $0\leq\frac{1}{2^n+1}\leq\frac{1}{2^n}\forall n$, entonces $\sum\frac{1}{2^n+1}$ también es convergente. ■

1.3.3 Prueba de comparación de límites

Definición 1.3.3

Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son series infinitas con terminos positivos, y $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, entonces:

- Si L finito ambas series tienen el mismo carácter.
- Si $L=0$ ambas convergen.
- Si $L\to\infty$ ambas divergen.

■ **Ejemplo 1.42**

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt[4]{n}+1}$$

Comparamos con la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt[4]{n}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3\sqrt[4]{n}+1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1+\dfrac{3}{\sqrt[4]{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{3}{\sqrt[4]{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Por la prueba de comparación de límites, ambas series tienen el mismo carácter.

b_n es una serie armónica con $p = \dfrac{1}{2}$. $p \leq 1$, entonces es divergente. Por lo tanto, a_n también es divergente. ■

1.3.4 Prueba de D'Alembert

Definición 1.3.4

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita con terminos positivos, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

Entonces,

- Si $\lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n$ converge
- Si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty \quad \Rightarrow \quad a_n$ diverge
- Si $\lambda = 1$, no se puede decir

■ **Ejemplo 1.43**

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

Prueba de D'Alembert.

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Por la prueba de D'Alembert $\lambda < 1$, entonces a_n converge. ■

1.3.5 Prueba de Raabe

Si la prueba de D'Alembert llega a la situación $\lambda = 1$, seguimos con la prueba de Raabe.

Definición 1.3.5

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita con terminos positivos, y

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$$

Entonces,

- Si $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty \Rightarrow \sum a_n$ converge
- Si $\lambda < 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ no se puede decir

Ejemplo 1.44

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ ■

1.3.6 Prueba de la raíz

Definición 1.3.6

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita con terminos positivos, y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

Entonces,

- $\lambda < 1 \Rightarrow a_n$ converge
- $\lambda > 1$ o $\lambda = \infty \Rightarrow a_n$ diverge
- $\lambda = 1 \Rightarrow$ no se puede decir

Ejemplo 1.45

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(log(n))^n}$$

Prueba de la Raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{log(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$$

Por la prueba de la raíz, $\lambda < 1$ entonces a_n converge. ■

1.3.7 Prueba de Leibnitz para series alternadas

Definición 1.3.7

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada.

Si la sucesión $|a_n|$ es decreciente y cumple:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

■ Ejemplo 1.46
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^3+1}$$

Prueba de Leibnitz.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

$|a_n|$ decreciente? Si decreciente: $|a_{n+1}| < |a_n|$ por todo n.

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^3+1} < \frac{n}{n^3+1}$$

$$(n+1)(n^3+1) < n((n+1)^3+1)$$

$$1 < 2n^3 + 3n^2 + n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $|a_n|$ es decreciente. Por la prueba de Leibnitz, a_n es convergente. ■

1.3.8 Más Ejemplos

■ Ejemplo 1.47
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}\right)^2$$

Prueba de D'Alembert.

$$a_{n+1} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n(2n+2)}\right)^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

Por la prueba de D'Alembert $\lambda = 1$, entonces no se puede decir si a_n converge o no. Seguimos con la prueba de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n-3}{4n^2+8n+4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n}{4n^2+8n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$$

Por la prueba de Raabe $\lambda = 1$, entonces no se puede decir si a_n converge o no. ∎

∎ Ejemplo 1.48
Raiz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{1+2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1+2n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{9}$.

Divergente. ∎

∎ Ejemplo 1.49
Raiz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{3+5n}}{n^{1+n^2}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\frac{3+\sqrt{n}}{n}}}{n^{\frac{1+n^2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\frac{3}{n}+5}}{n^{\frac{1}{n}+n}} = 0$.

Convergente. ∎

∎ Ejemplo 1.50
Comparación.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-sen(n))(1+sen(n))}{n^2+8n+1}$.

Si $0 \leq sen^n(n) \leq 1$ y $n^2+8n+1 > 0 \forall n$ entonces $0 \leq \frac{(1-sen(n))(1+sen(n))}{n^2+8n+1} \leq 1$.

Sabemos que $\frac{1}{n^2+8n+1} < \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ es una serie armónica con $p=2$, entonces convergente. Por la prueba de comparación, la serie original converge. ∎

∎ Ejemplo 1.51
Raíz.

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$. Por la prueba de la raíz, $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}-1$.

$ln(1+\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln(n)$. Por órdenes de infinitud, $ln(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Por la prueba de la raíz, la serie converge. ∎

∎ Ejemplo 1.52
Convergencia condicional / absoluta.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$. Prueba de Leibnitz:

¿Decreciente? $|a_n| = \frac{2n+1}{n(n+1)}$. $|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{-2n-2}{n(n+1)(n+2)} < 0 \forall n$. Entonces decreciente.

También $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Por la prueba de Leibnitz, converge.

Convergencia absoluta/condicional: Se puede comparar la serie $\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ con $\sum \dfrac{1}{n}$. (porque $\frac{1}{n} < \frac{2n+1}{n(n+1)} \forall n$, demostrado despejando hasta $0 < n^2 \forall n$.)

$\sum \dfrac{1}{n}$ serie armónica con $p = 1$, divergente. Por la prueba de comparación, nuestra serie $\sum |a_n|$ diverge.

Entonces la serie original converge condicionalmente. ■

1.4 Problemas

1. Escribe los valores a_1, a_2, a_3, a_4 para la sucesión $\{a_n\}$ definida por:
   a. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$
   b. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$
2. Escriba los primeros 10 términos de las sucesiones:
   a. $a_1 = -2$, $a_{n+1} = n\dfrac{a_n}{n+1}$
   b. $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
3. Encuentre la ecuación para las siguientes sucesiones:
   a. $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
   b. $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
   c. $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$
   d. $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$
   e. $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
   f. $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
4. Demuestre que la siguiente sucesión está acotada:
$$a_n = 3 - \frac{5}{n}$$
5. Demuestre que la siguiente sucesión está acotada:
$$a_n = 5 + 4cos(n)$$
6. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre la losa de concreto. Cada vez que rebota alcanza una altura equivalente a 2/3 de la altura anterior. Determine la altura que alcanza en el tercer rebote y en el n-ésimo rebote.
7. Un objeto se deja caer desde un gran altura, de tal manera que recorre 16m durante el primer segundo, 48m durante el segundo, 80m durante el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre el objeto durante el sexto segundo?
8. Sea $\{a_n\}$ una sucesión (infinita) con término general a_n. Estudie la sucesión: acotación, monotonía, gráfica, convergencia y límite.
   a. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ b. $a_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{n+1}{n^2}$
   c. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n-1}$ d. $a_n = 1 + (-1)^n$
   e. $a_n = sen(n\pi)$
9. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con $a_1 = 1$.
   a. Prueba por inducción que $a_n < 2\ \forall n$.
   b. Justifica que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente y halla su límite.
10. Considerar la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{4}, a_1 = 0$.
    a. Demuestra por inducción que $a_n < \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
    b. Demuestra que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.
    c. Encuentra el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
11. Considerar la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
    a. Demuestra por inducción que $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
    b. Demuestra que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.
    c. Encuentra el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

12. ¿Las siguientes sucesiones son monótonas?

a. $a_n = \{-1,-2,3,-4,-5,6,-7,-8,9,...\}$
b. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
c. $a_n = n$
d. $a_n = \{-1,-1,0,0,1,1,2,2,...\}$
e. $a_n = -n^2$
f. $a_n = \{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{7},...\}$

13. Demostrar convergencia y buscar el límite de

$$s_{n+1} = \frac{s_n+3}{5} \qquad s_1 = 1$$

14. Calcular los siguientes límites de sucesiones:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} + 1$
b. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{10} - n^8 - n^6$
c. $\lim\limits_{n\to\infty} -2n+5$
d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+3}{n+4} - \dfrac{3n^2-7}{n^2+8}$
e. $\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}$
f. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n-5}{4n^2+n-6}\right)^{\frac{n+2}{2n-1}}$
g. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+9}{2n-7}\right)^n$
h. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-n^2+5n^3}{4n+2n^3-1}$
i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n-2}{n+2}$
j. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+7n+5}{n^5}$
k. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)+3}{(3n+2)(n-5)}$
l. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3}n^2+\sqrt{2}n+n}{-\sqrt{2}n^2+5n+2}$
m. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}-n$
n $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^8 - n^6$
o $\lim\limits_{n\to\infty} -5n^2+8n-6$
p $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2-1}}$
q $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2} - \dfrac{3n^2-5n}{3n+4}$
r $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4}$
s $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$
t $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2-1}}$
u $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-3n^2+2}-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n}}$

15. Calcular los siguientes límites de sucesiones, usando el teorema de Sandwich:
a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{sen(x)}{x}$
b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(2+sen^2(x))}{x+100}$
c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-sen(3x)}{x^2+10}$
d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{cos^2(2x)}{3-2x}$

16. Fijado $1 < t \leq 4$, consideramos la sucesión recurrente dada por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{t}{x_n}) \text{ para } n \geq 1.$$

a. Demuestre (por inducción) que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2.
b. Demuestre que es monótona decreciente. Deduzca que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

17. Buscar la suma de las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(-3)^n} - \frac{3}{3^n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{1/n}+14}$

h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$ $\quad -x \notin \mathbb{N}$

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}$

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

18. Demuestra la convergencia de las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+cos(n)}{3^n+2n^3}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt[4]{n}+1}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n\sqrt{n}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3+n!}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\right)^2$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\cdot x^n, \quad x>0$

j. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(log(n))^n}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s \in \mathbb{R}$

l $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^3+1}$

m $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)\cdots(n-1+\beta)}$

19 Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ es convergente.

20 Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente condicionalmente.

21 Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series convergentes con sumas $a, b \in \mathbb{R}$ respectivamente.
  a. Enuncia el teorema de convergencia monótona.
  b. Demuestra que la serie $\sum a_n + b_n$ es convergente.
  c. Sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que la serie $\sum c \cdot b_n$ es convergente y dar su suma.

22 Estudia el carácter de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

II

Tema 2 - Límites y Continuidad

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1subsection.1.1.2subsec

chapter.3subsection.3.0.1subsection.3.0.2subsection.3.0.3subsec

2. Límites y Continuidad

2.1 Límites de funciones de una variable real

Definición 2.1.1 — Entornos.
Dados $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, definimos el **entorno** del punto a con radio ε:

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

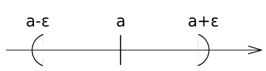


Figura 2.1: Entorno de un punto

Cuando el valor del radio del entorno de un punto de x se acerca a 0, estamos considerando el límite de la función en ese punto.

Definición 2.1.2 — Límite.
Sea la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es **límite** de f en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

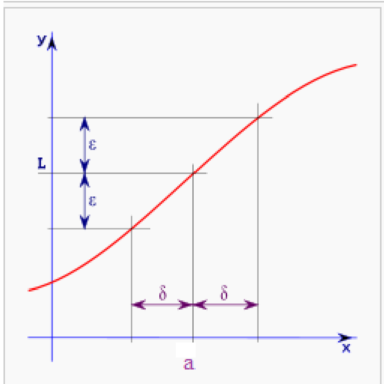


Figura 2.2: Límite en un punto

Notación: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Teorema 2.1.1 — Unicidad del límite.
Si existe un límite $l \in \mathbb{R}$ de la función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es único.

Definición 2.1.3 — Límite Secuencial.
Dada la función $f : A \to \mathbb{R}$, existe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2.1}$$

si y solo si para toda sucesión $x_n \in A$ que converge a $x = a$:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L \tag{2.2}$$

El límite secuencial nos dice que para cualquier sucesión que tiene límite $x = x_0$ en el dominio de $f(x)$, el valor del la función de esa sucesión es el límite de la función.

■ **Ejemplo 2.1**
Si tenemos la función $f : A \to \mathbb{R}$, con límite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, y definimos la sucesión

$$a_n = \left\{ x_0 - \frac{1}{n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cuando tomamos el límite de la sucesión a_n, $\lim_{n \to \infty} a_n$, vemos que su valor es x_0.

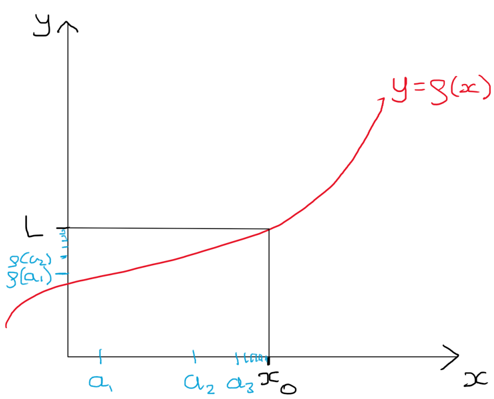


Figura 2.3: Límite Secuencial ejemplo

A la vez, vemos que el valor de la función de esa sucesión, cuando $n \to \infty$, acerca a L.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$$

■

■ Ejemplo 2.2
Si tenemos la función $f : A \to \mathbb{R}$, con límite $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, y definimos la sucesión

$$b_n = \left\{ x_0 + \frac{1}{n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cuando tomamos el límite de la sucesión b_n, $\lim_{n\to\infty} b_n$, vemos que su valor es x_0.

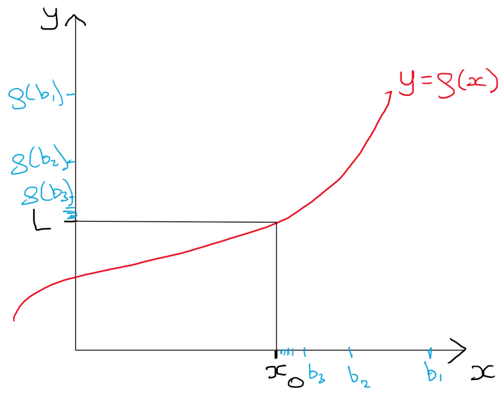


Figura 2.4: Límite Secuencial ejemplo

A la vez, vemos que el valor de la función de esa sucesión, cuando $n \to \infty$, acerca a L.

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = L$$

■

■ Ejemplo 2.3
Si tenemos la función $f : A \to \mathbb{R}$, con límite $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, y definimos la sucesión

$$c_n = \left\{ x_0 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cuando tomamos el límite de la sucesión c_n, $\lim_{n\to\infty} c_n$, vemos que su valor es x_0.

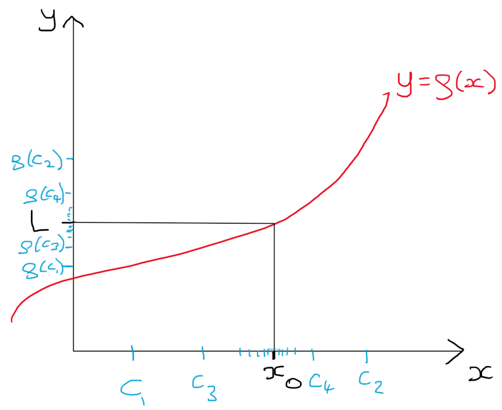


Figura 2.5: Límite Secuencial ejemplo

A la vez, vemos que el valor de la función de esa sucesión, cuando $n \to \infty$, acerca a L.

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = L$$

■

■ **Ejemplo 2.4**

Si dos (o más) sucesiones que convergen a $x = x_0$ tienen distintos valores $f(x_n)$, entonces el límite de la función no existe.

Si tenemos la siguiente función $f(x)$, y las dos sucesiones:

$$a_n = \left\{x_0 - \frac{1}{n}\right\}, \quad b_n = \left\{x_0 + \frac{1}{n}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty b_n} = x_0$$

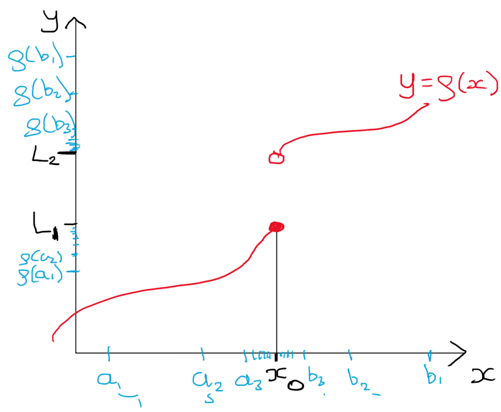


Figura 2.6: Límite Secuencial ejemplo

En este caso, vemos que:

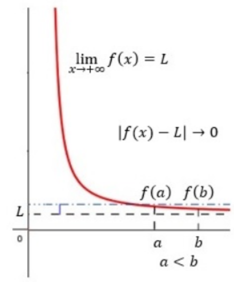
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L_1, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = L_2.$$

Entonces dos sucesiones del dominio de $f(x)$ que convergen al punto $x = x_0$ tienen distintos límites de $f(x_n)$, entonces el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ no existe. ■

Límites infinitos

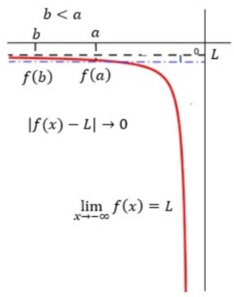
Definición 2.1.4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



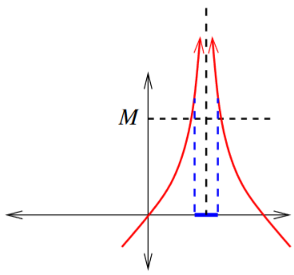
Definición 2.1.5

$$\text{lím}_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Definición 2.1.6

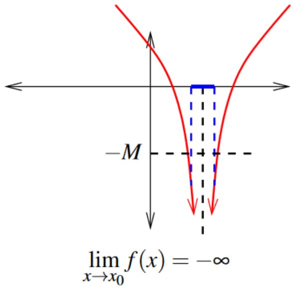
$$\text{lím}_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Definición 2.1.7

$$\text{lím}_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$



2.1.1 Funciones Acotadas

Definición 2.1.8 — Función Acotada.
Si $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de una variable real. Decimos que f es una función **acotada** si $\forall x \in A,\ \exists m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$.

■ **Ejemplo 2.5**
La función $f(x) = sen(x)$ está acotada entre -1 y 1.

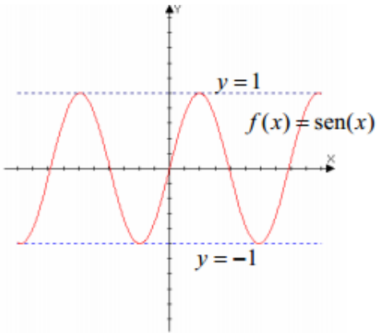
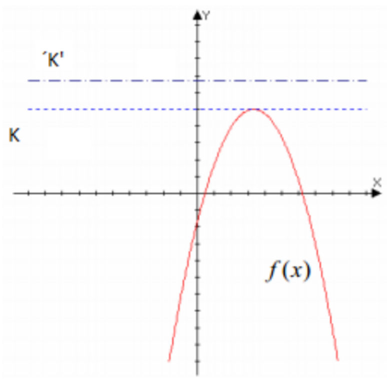


Figura 2.7: Cotas de $f(x) = sen(x)$

■

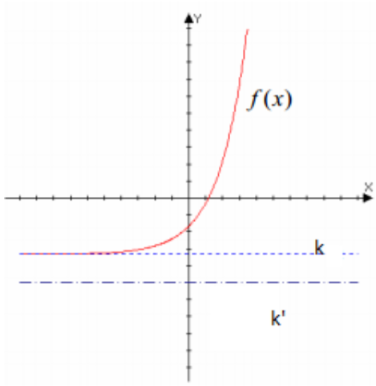
Definición 2.1.9 — Supremum.
El supremo de una función $f(x)$ es el mínimo del conjunto de cotas superiores.

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$$



Definición 2.1.10 — Ínfimo.
El ínfimo de una función $f(x)$ es el máximo del conjunto de cotas inferiores.

$$\text{ínf}_{x\in A} f(x) = \text{ínf}\{f(x) : x \in A\}$$



■ **Ejemplo 2.6**
Encuentre las cotas de la función $f(x) = sen(4x) - 1$.

La función $sen(4x)$ está acotada entre -1 y 1:

$$-1 \leq sen(4x) \leq 1$$

Entonces,

$$-2 \leq sen(4x) - 1 \leq 0$$

Una cota inferior de $f(x)$ es -2, y una cota superior es 0. ■

2.1.2 Teorema del Sandwich

Teorema 2.1.2 — Teorema del Sandwich.
Dadas las funciones f, g, h de una variable real x tales que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. Entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Figura 2.8: Teorema del Sandwich

■ **Ejemplo 2.7**
Resuelve el siguiente límite, usando el teorema del Sandwich.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x)}{x}$$

Para buscar dos funciones que acotan $f(x)$, empezamos con cotas conocidas dentro de la función:

$$-1 \le sen(x) \le 1$$

Entonces,

$$\frac{-1}{x} \le \frac{sen(x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

■

Demostración 2.1 — Teorema del Sandwich.
Definimos las funciones f,g y h tales que:

$$f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in A$$

Si los límites de las funciones f y h cumplen:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

$\Rightarrow$

$$f(x) - L \le g(x) - L \le h(x) - L$$

Sea $\varepsilon > 0$, definimos $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ y $(a-\delta_2, a+\delta_2)$ tales que cumplen:

$$|f(x) - L| < \varepsilon,\ |h(x) - L| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ para x dentro de $(a-\delta_1, a+\delta_1) \cap (a-\delta_2, a+\delta_2)$

$$\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

Designamos a δ el mínimo entre δ_1 y δ_2, y quedamos con el entorno $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Entonces desde $\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$ definimos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 \le |x-a| \le \delta \ \Rightarrow\ |g(x) - L| < \varepsilon$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

$f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in A$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. Entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

■

2.1.3 Propiedades

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. Entonces:

- $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$,
- $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$,
- $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2},\ \ l_2 \ne 0.$

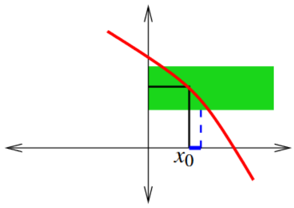
2.1.4 Existencia y Convergencia

2.1.5 Límites Laterales

Definición 2.1.11

$$A^{+} := \{x \in A : x > x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) := \lim_{x \to x_0} f|_{A^{+}}(x).$$

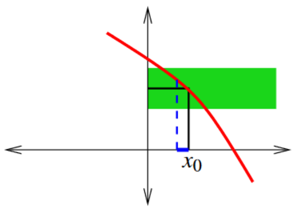


Límite por la derecha

Definición 2.1.12

$$A^{-} := \{x \in A : x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^{-}} f(x) := \lim_{x \to x_0} f|_{A^{-}}(x)$$



Límite por la izquierda

Teorema 2.1.3 Si

$$\lim_{x \to a} f(x) := L,$$

Es equivalente decir:

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$$

■ Ejemplo 2.8

La función $f(x)$ definida por trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tiene gráfica:

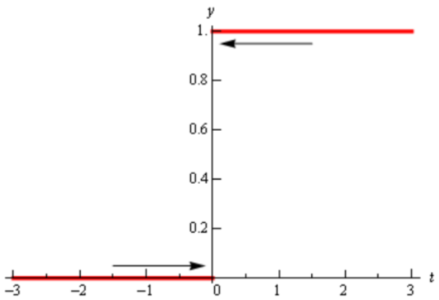


Figura 2.9: Límites laterales

El límite lateral negativa (por la izquierda) tiene valor:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

El límite lateral positiva (por la derecha) tiene valor:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

En este caso, $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, entonces no existe el límite de $f(x)$ en el punto $x=0$. ■

■ **Ejemplo 2.9**
Resuelve el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

Si resolvemos el límite directamente,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^2}$$

Indeterminación. Entonces miramos a los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{1^+ + 1}{(1^+ - 1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2^+}{(0^+)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{1^- + 1}{(1^- - 1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2^-}{(0^-)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Los límites laterales son iguales, entonces existe el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$$

■

2.2 Continuidad de funciones de una variable real

2.2.1 Continuidad

Definición 2.2.1
Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en x_0 si cumple $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

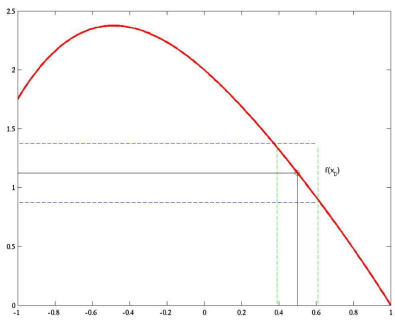


Figura 2.10: Función continua

■ **Ejemplo 2.10**
Comente la continuidad de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{5}{x^4 - 16}$$

La función tiene puntos críticos cuando $x = \pm 2$. Si consideramos el punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} = \frac{5}{0}$$

Indeterminación. Miramos a los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} = \frac{5}{16^- - 16}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} = \frac{5}{16^+ - 16}$$

$$\lim_{x \to 2^-} = +\infty$$

Los límites laterales son distintos, entonces el límite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe y la función $f(x)$ no es continua en el punto $x = 2$. ■

Definición 2.2.2
Si A es un conjunto de números reales, se dice que una función $f(x)$ es **continua** en A si cumple $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in A$.
Si miramos a un intervalo en A, (b,c), estudiamos continuidad en $a \in (b,c)$.
Si es un intervalo cerrado $[b,c]$, también hay que estudiar los puntos b, c

■ **Ejemplo 2.11**
Estudie la continuidad de la siguiente función en los intervalos $[4,6]$ y $[0,6]$.

$$f(x) = \frac{5}{x^4 - 16}$$

En el intervalo $[4,6]$, $f(x)$ es continua. $x^4 - 16 \neq 0 \;\; \forall x \in [4,6]$.

En el intervalo $[0,6]$, $f(x)$ tiene un punto crítico $x = 2$. $f(2)$ no existe, por lo tanto, $f(x)$ no es continua en el intervalo $[0,6]$. ∎

Definición 2.2.3
Si una función f es continua en un intervalo, se puede decir que f esta **acotada** en dicho intervalo.

■ **Ejemplo 2.12**
¿Es la siguiente función acotada en el intervalo $[0,2]$?

$$\frac{x^2+2}{x^2-1}$$

En el punto $x = 1$, la función no existe. Entonces $f(x)$ no es continua en $[0,2]$. Por lo tanto, $f(x)$ no esta acotada en $[0,2]$. ∎

Operaciones con funciones continuas Sean las funciones $f,g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y las dos continuas en el punto x_0:

- $f + g$ es continua
- $f \cdot g$ es continua
- αf es continua, con $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\frac{f}{g}$ es continua si $g(x) \neq 0$

Definición 2.2.4
Si una función $f(x)$ no es continua en un punto de su dominio, se dice que la función tiene una **discontinuidad** en ese punto.

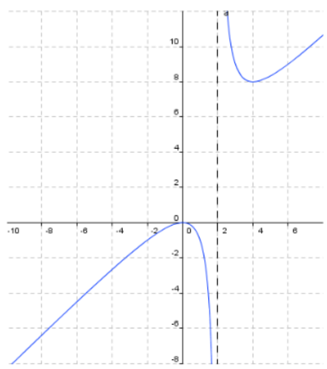


Figura 2.11: Discontinuidad en un punto

Distinguimos entre varios tipos de discontinuidades, con distintas propiedades:

Discontinuidad Evitable La función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} = cf(x)$ y $f(a) = d$ o $f(a)$ no existe.

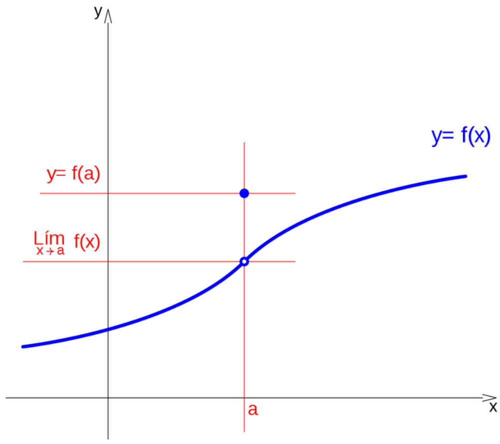


Figura 2.12: Discontinuidad Evitable

Discontinuidad Inevitable - Salto Finito La función $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

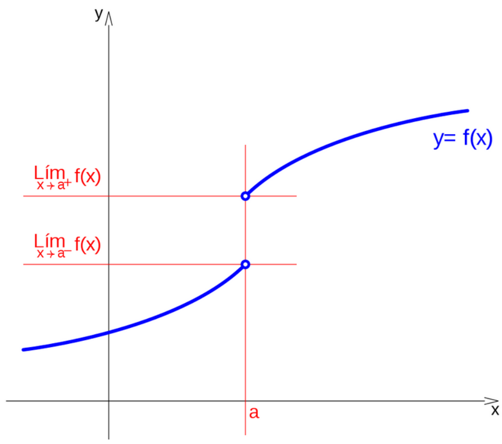


Figura 2.13: Discontinuidad Inevitable - Salto finito

Discontinuidad Inevitable - Salto Infinito La función $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$ (o al revés).

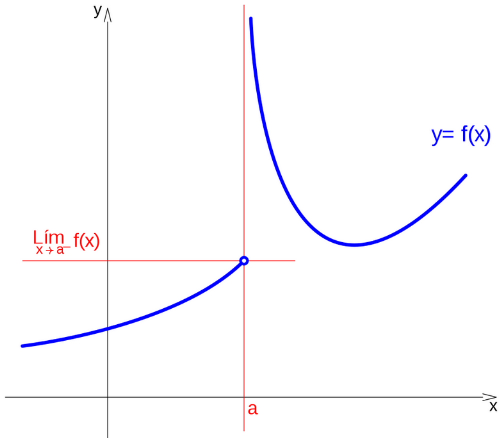


Figura 2.14: Discontinuidad Inevitable - Salto infinito

Discontinuidad Inevitable - Asintótica La función $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable asintótica si $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (o al revés).

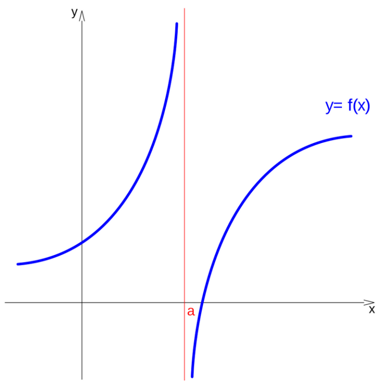


Figura 2.15: Discontinuidad Inevitable - Asintótica

■ **Ejemplo 2.13**
Clasifique las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ 2x - 3 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ tiene punto crítico cuando $x = 0$, y es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ por ser formada por polinomios de números reales. Mirando a los límites laterales en el punto crítico:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$$

Los límites laterales son finitos y distintos. Por lo tanto, es una discontinuidad inevitable salto finito, con salto de tamaño 2. ■

2.2.2 Indeterminaciones

En la resolución de algunos límites de funciones de variables reales, es posible encontrar una situación con una **indeterminación**.

Indeterminaciones Definiciones:

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- 0^0
- ∞^0
- $\infty - \infty$
- 1^∞

La primera forma de superar problemas causados por indeterminaciones es el uso de álgebra para simplificar la expresión, y evitar la indeterminación.

■ **Ejemplo 2.14**
Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

En vez de resolver el límite directamente, podemos simplificar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = \frac{\infty}{1+0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = \infty.$$

■

■ **Ejemplo 2.15**
Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} 3^x x - 2^x = \infty - \infty$$

En vez de resolver el límite directamente, podemos simplificar:

$$\lim_{x\to\infty} 3^x x - 2^x = \lim_{x\to\infty} 3^x \left(\frac{3^x x}{3^x} - \frac{2^x}{3^x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} 3^x x - 2^x = \lim_{x\to\infty} 3^x \left(x - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} 3^x x - 2^x = \infty(\infty - 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} 3^x x - 2^x = \infty.$$

■

2.3 Teorema de Bolzano

Teorema 2.3.1 — Teorema de Bolzano.
Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$.
Si $f(a)f(b) < 0$

$$\exists\, c \in [a,b] : f(c) = 0. \tag{2.3}$$

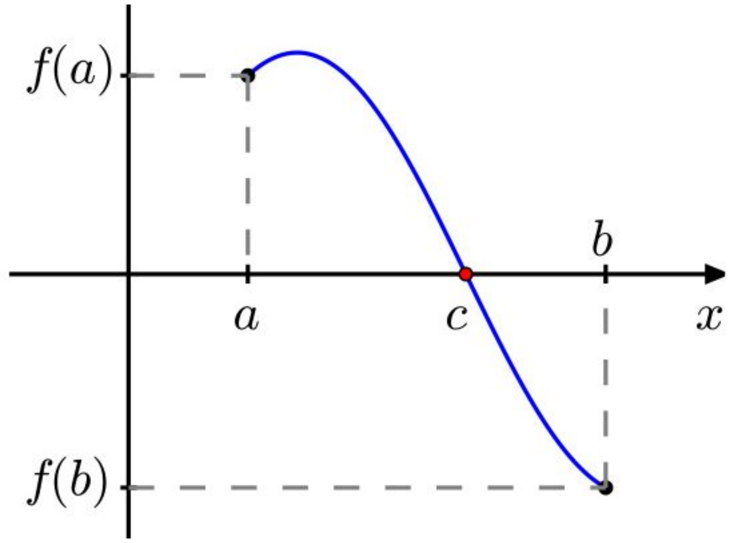


Figura 2.16: Teorema de Bolzano

■ Ejemplo 2.16
Demuestra que la función $f(x) = 2x - 2$ tiene raíz en el intervalo $x \in [0,3]$.

La función $f(x)$ es continua en el intervalo de interés, por ser un polinomio. Tenemos:

$$f(0) = -2 \qquad \text{y} \qquad f(3) = 4$$

$$f(0) \cdot f(3) < 0$$

Entonces por el teorema de Bolzano, $\exists\, c \in [0,3] : f(c) = 0$. ■

Definición 2.3.1 — Método de Bisección.

Una vez identificado la existencia de una raíz de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, existen numerosos métodos para determinar dicha raíz. Un método, el **método de Bisección**, utiliza cortes del intervalo de interés y el teorema de Bolzano, para aproximar la raíz de la función.

Empezando desde el intervalo $[a,b]$, el método corta el intervalo por la mitad, comprueba con el teorema de Bolzano en cual de los dos intervalos nuevos existe la raíz, y selecciona ese intervalo para repetir el proceso hasta conseguir una aproximación aceptable de la raíz (el estudio de métodos numéricos de este estilo aparece en otras asignaturas del grado).

El método realmente busca el límite de la sucesión de los **intervalos encajados** formada por la bisección del intervalo original.

2.4 Principio de los intervalos encajados

Teorema 2.4.1 — Principio de los intervalos encajados.
Sea $I_n = [a_n, b_n]$ una sucesión de intervalos encajados, donde $n \in \mathbf{N}$ y $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, que cumple:

i) $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots,$

ii) $\lim_{n\to\infty}[b_n - a_n] = 0$

Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contiene un único elemento x, y las sucesiones a_n y b_n convergen a x.

Demostración 2.2

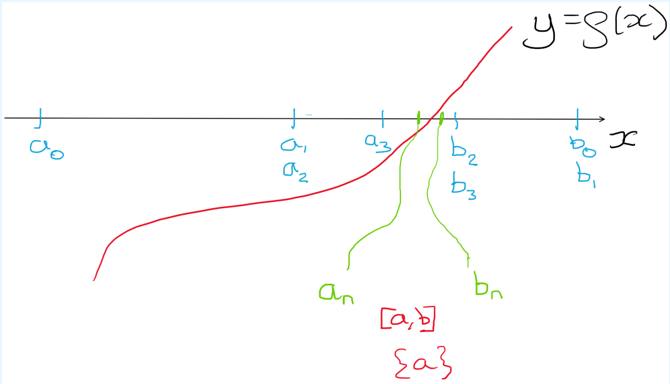


Figura 2.17: Intervalos encajados

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones donde $a_n \leq b_n \; \forall n$. Si $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbf{N}$ y $b_{n+1} \leq b_n \; \forall n \in \mathbf{N}$, vemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona decreciente.

Tenemos que $a_n \leq b_m \; \forall n, m \in \mathbf{N}$. Definimos $a = \sup a_n$ y $b = \inf b_n$

Entonces,

$$\sup a_n \leq b_m \; \forall m \tag{2.4}$$

$\Rightarrow$

$$a = \sup a_n \leq b = \inf b_n \tag{2.5}$$

Entonces $[a,b] \subset [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n \supset [a,b] \neq \varnothing \tag{2.6}$$

También

$$b - a \leq b_n - a_n \; \forall n \in \mathbf{N} \tag{2.7}$$

además, tenemos

$$[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1] \subset \ldots \tag{2.8}$$

Si definimos los elementos de las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ usando el método de bisección, podemos analizar la diferencia de tamaño entre cada sub-intervalo:

$$\begin{aligned}
b_1 - a_1 &= \frac{b_0 - a_0}{2} \\
b_2 - a_2 &= \frac{b_1 - a_1}{2} \\
&= \frac{\frac{b_0 - a_0}{2}}{2} \\
&\vdots \\
b_n - a_n &= \frac{b_0 - a_0}{2^n}
\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$, $\quad b_n - a_n \to 0 \quad \Rightarrow a = b$
Entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n = [a,b] = a. \tag{2.9}$$

■

2.5 Teorema de Weierstrass

Teorema 2.5.1 — Teorema de Weierstrass.
Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto, y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces, f es acotada en I.

Además, observamos que f obtiene su máximo y su mínimo en I.

Es decir:

$$\exists x_1, x_2 : m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \forall x \in I. \tag{2.10}$$

2.6 Problemas

1. Use el teorema del Sandwich para resolver:
   a.
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{sen(x)}{x}$$
   b.
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-sen(2x)}{x^2+1}$$
   c.
   $$\lim_{x\to0} xcos\left(\frac{1}{x}\right)$$
2. Resuelve los siguientes límites:
   a.
   $$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$$
   b.
   $$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}$$
   c.
   $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$
3. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en sus puntos críticos:
   a.
   $$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$
   b.
   $$f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ si } x<2\\ 2x-1 \text{ si } x\geq 2\end{cases}$$
   c.
   $$f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ si } x<0\\ 2x-3 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$
4. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos dados:
   a.
   $$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$
   en $[4,6]$ y $[0,6]$.
   b.
   $$f(x)=\sqrt{x+3} \text{ en } (-3,3)$$
   c.
   $$f(x)=\frac{3+x}{2-x} \text{ en } [-3,3]$$
5. Clasifique las discontinuidades de las siguientes funciones:
   a.
   $$f(x)=\frac{5}{x^4-16} \quad x\in[0,3]$$
   b.
   $$f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ si } x<0\\ 2x-3 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$
6. Resuelve las siguientes indeterminaciones.
   a.
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}$$
   b.
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{5^x}$$
   c.
   $$\lim_{x\to\infty} 3^x x-2^x$$
   d.
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x-1}\right)^x$$

7. Determine si existen raíces de las siguientes funciones en los intervalos dados.

   a.
   $$f(x) = x^2 \qquad x \in [-5,5]$$

   b.
   $$f(x) = 2x - 2 \qquad x \in [0,3]$$

8. Conteste a las siguientes preguntas:

   a. Compruebe que $x^3 + x - 1$ tiene una raíz en el intervalo $[0,1]$.
   b. ¿La siguiente función tiene raíz en el intervalo $[0,2]$?
   $$\frac{2x-3}{x-1}$$
   c. Utilizando el teorema de Bolzano, demuestre que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene una solución $x = a$ tale que $1 \leq a \leq 2$.

9. Estudie la continuidad de la siguiente función:
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x \leq 1 \\ \dfrac{1-x}{x} & 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{2x}{x-5} & x > 3 \end{cases}$$
   donde $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,5\}$.
10. ¿En qué puntos es discontinua la función $tan(x)$?
11. Sea f una función real continua en $(-1,1)$, con $f(0) > 0$. Probar que la función g, dada por $g(x) = x^2 f(x), x \in (-1,1)$, tiene un mínimo relativo en $x_0 = 0$.

III Tema 3 - Diferenciación

3. Derivadas de funciones de una variable real

Definición 3.0.1 — Derivada.
Sea f una función continua en $x=a$. Definimos la **derivada** en el punto $x=a$ por:

$$f'(a)=\frac{df}{dx}(a):=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si este límite existe, se dice que f es derivable en el punto $x=a$.

Sea f una función y $a\in Dom(f)$.

Teorema 3.0.1 Si f no es continua en el punto $x=a$, entonces f no es derivable en el punto $x=a$.

Teorema 3.0.2 Si f es derivable en el punto $x=a$, entonces f es continua en el punto $x=a$.

■ **Ejemplo 3.1**
Estudie la derivabilidad de la siguiente función.

$$\begin{cases} x^2, & \text{si } x\leq 0\\ 2x+1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

$f(x)$ es una función formada por dos polinomios, que son derivables $\forall x\in\mathbb{R}$. En el punto crítico $x=0$, tenemos límites laterales de la derivada: $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$, entonces el límite no existe y la función $f(x)$ no es derivable en $x=0$.
■

Definición 3.0.2
Sean f,g funciones derivables en el punto $x=a$. Entonces,
1 $f\pm g$ es derivable en el punto $x=a$
2 $f\cdot g$ es derivable en el punto $x=a$

3 Si $g'(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es derivable en el punto $x = a$.

Teorema 3.0.3
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, f es monótona estrictamente creciente en $[a,b]$.
Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es monótona creciente en $[a,b]$.

Tenemos el mismo resultado para las funciones decrecientes.

■ **Ejemplo 3.2**
Probar que la función f definida en toda la recta real por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ \ (x < 0), \ \ f(x) = 0 \ \ (x \geq 0)$$

es derivable y decreciente en toda la recta real.

La función solo tiene problemas de derivabilidad en el punto $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$ln(f'(0^-)) = \lim_{x \to 0^-} ln\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} (ln(e^{\frac{1}{x}}) - ln(x))$$

$$ln(f'(0^-)) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0^-} ln(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = 0$$

por regla de l'Hôpital para las funciones continuas y derivables en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Entonces f es derivable en $x = 0$, y además $f'(0) = 0$.

La derivada de f para $x < 0$ es $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} < 0 \ \ \forall x < 0$. Cuando $x \geq 0$, $f'(x) = 0$. Entonces f es decreciente por todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 3.0.4
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Si f y g son derivables en (a,b), $f(a) \leq g(a)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

O bien considerar la diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$ y estudiar qué signo tiene, a través de $h'(x)$.

■ **Ejemplo 3.3**
Establecer la desigualdad $sen(x) < x \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = x$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) por ser polinomios. Vemos que $g(a) \geq f(a)$ y las derivadas cumplen $f'(x) < g'(x) \ \forall x \in [a,b]$. Entonces, sabemos que $sen(x) < x \ \forall x \in (a,b)$. ■

3.0.1 Derivada de un cociente

Definición 3.0.3
Sea $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua de la forma $f(x) = \frac{u}{v}$. La derivada de $f(x)$ se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{df}{dx} = \frac{u \cdot dv - v \cdot du}{v^2} \tag{3.1}$$

■ **Ejemplo 3.4**
Halle la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \frac{3x^2}{sen(x)}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \frac{3x^2 cos(x) - 6xsen(x)}{cos^2(x)}$$

■

3.0.2 Regla de la cadena

Definición 3.0.4 — Regla de la cadena.
Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(A) \subset B$. Si f es derivable en el punto $x = a$ y g es derivable en el punto $x = f(a)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en el punto $x = a$ y:

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{3.2}$$

■ **Ejemplo 3.5**
Halle la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = sen(cos(x))$$

Aplicando la definición:

$$\frac{d(f)}{dx}(x) = -cos(cos(x)) \cdot sen(x)$$

■

3.0.3 Propiedades

Sean f y g dos funciones derivables:
Aditivo

$$(f+g)' = f' + g' \tag{3.3}$$

Producto

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g \tag{3.4}$$

3.0.4 Derivadas de orden superior

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el conjunto A, es decir, f es derivable $\forall x \in A$. Entonces se puede considerar la primera derivada f' de f, donde $\forall x \in A,\ f'(x) \in \mathbb{R}$.

Si f' es derivable en un punto $a \in A$, se dice que f es dos veces derivable en a, y la derivada de $f'(a)$ se define por $f''(a)$.

Por inducción se define una función n veces derivable en $a \in A$: f ha de ser $n-1$ veces derivable en A y la función $f^{(n-1)}$ ha de ser derivable en a. La derivada n-ésima se define como $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$.

3.0.5 Convexidad/Concavidad

Definición 3.0.5
Una función derivable f en un intervalo es **convexa** (resp. **cóncava**) cuando f' es una función monótona creciente (resp. decreciente).

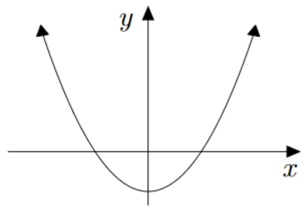


Figura 3.1: Función convexa

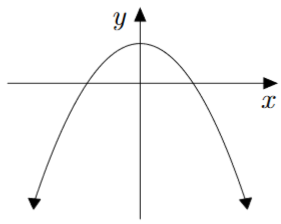


Figura 3.2: Función cóncava

Definición 3.0.6
Se dirá que f tiene un punto de inflexión en a cuando f sea convexa a la izquierda de a y cóncava a la derecha (o al revés).

Definición 3.0.7
Para que una función dos veces derivable en un intervalo sea convexa es necesario y suficiente que $f''(x) \geq 0$ para todo x.

Sea f n veces derivable en a y tal que $f'(a) = 0$. Sea $n \geq 2$ el menor índice tale que $f^{(n)}(a) \neq 0$.
Si n es par, f tiene un extremo relativo estricto en a.
- Mínimo si $f^{(n)}(a) > 0$
- Máximo si $f^{(n)}(a) < 0$

Si n es impar, f no tiene extremo relativo en a. Si además f es n veces derivable alrededor de a y $f^{(n)}$ es continua en a, entonces hay una inflexión en a.

■ Ejemplo 3.6
Clasificar los puntos críticos de la función con derivada

$$f'(x) = e^{-2x}(3-x)(x+1)^2$$

Los puntos críticos ocurren cuando $f'(c) = 0 \Rightarrow 0 = e^{-2c}(3-c)(c+1)^2$, entonces $c = 3$, o $c = -1$. Consideramos el signo de la derivada de f a la izquierda y derecha de los puntos críticos. Cuando $x \to 3^-$, $f'(x) > 0$ y cuando $x \to 3^+$, $f'(x) < 0$. Por lo tanto, $x = 3$ es un máximo. Cuando $x \to -1^-$, $f'(x) > 0$ y cuando $x \to -1^+$, $f'(x) > 0$. Por lo tanto, $x = -1$ es un punto de inflexión. ■

3.1 Teorema de Fermat

Teorema 3.1.1 — Teorema de Fermat (condición necesaria de extremo).
Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea f una función derivable en I. Suponemos que f tiene un extremo en el punto $x = a \in I$.

Entonces $f'(a) = 0$

Demostración 3.1
Sea $a \in I$ un punto donde $f(x)$ es derivable y tiene extremo: $\exists\delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \subset I$.
Demostramos que para un máximo $f(a) \geq f(x)\ \ \forall x \in I \cap (a-\delta, a+\delta)\ \ |x-a| < \delta$.
Límites laterales, usando la definición de la derivada:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{3.5}$$

Si $f(a) \geq f(x) \forall x \in I \cap (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow f(x)-f(a) \leq 0$.
También, $x \to a^+ \quad \Rightarrow x-a > 0$. Entonces,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0. \tag{3.6}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{3.7}$$

Si $f(a) \geq f(x) \forall x \in I \cap (a-\delta, a+\delta) \quad \Rightarrow f(x)-f(a) \leq 0$.
También, $x \to a^- \quad \Rightarrow x-a < 0$. Entonces,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0. \tag{3.8}$$

Entonces desde (3.6) y (3.8),

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0. \tag{3.9}$$

Desde la definición del límite,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{3.10}$$

Por lo tanto,

$$f'(a) = 0. \tag{3.11}$$

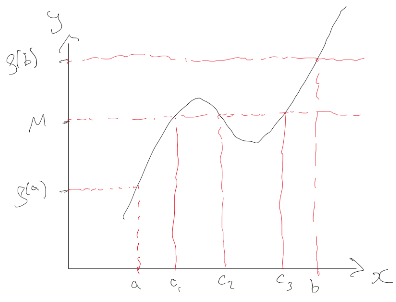
■

Importante **No** basta que sea la derivada de $f(x)$ igual a cero para ser un extremo.

■ **Ejemplo 3.7**
Busque el extremo de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-2, 2]$.
La derivada de $f(x)$ viene dada por $f'(x) = 3x^2$, lo cual tiene valor cero cuando $x = 0$.
Pero no obstante, la función no tiene extremo cuando $x = 0$. ■

3.2 Teorema del valor intermedio

Teorema 3.2.1 — del valor intermedio..
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Entonces, para todo $M \in (f(a), f(b))$ se tiene que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = M$.



■ **Ejemplo 3.8**
Demuestra que $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 5$ tiene una raíz en el intervalo $[-1,2]$.

En otras palabras queremos saber si $p(x) = 0$ en el intervalo dado, es decir $\exists\ c \in [-1,2]$ tal que $p(c) = 0$. Para resolver esto, podemos aplicar el teorema del valor intermedio.

Tenemos que confirmar que $p(x)$ es continua, y demostrar que $p(-1) < 0 < p(2)$. Vemos que $p(x)$ es un polinomio, entonces es continuo en todo $\mathbb{R}$, y $p(-1) = 8 > 0 > -19 = p(2)$. Entonces por el teorema, existe un punto $c \in [-1,2]$ tal que $p(c) = 0$.

NO sabemos cual es el punto. ■

■ **Ejemplo 3.9**
Si posible, determine si $f(x) = 20sen(x+3)cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ tome los siguientes valores en el intervalo $[0,5]$.

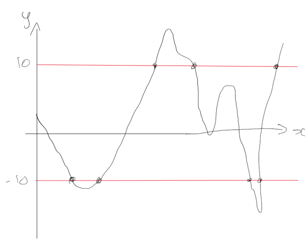
a. ¿$f(x) = 10$?

$f(x)$ es una función continua, por ser suma de dos funciones continuas. Tenemos $f(0) = 2{,}8224$ y $f(5) = 19{,}7436$. Vemos que $f(0) < 10 < f(5)$, entonces por el teorema del valor intermedio sabemos que existe un valor $c \in [0,5]$ donde $f(c) = 10$.

b. ¿$f(x) = -10$?

Vemos que $-10 \notin [0,5]$. ¿Qué nos dice el teorema, entonces?
NO nos dice que $f(x) \neq -10\ \in [0,5]$. Es posible que sí. El teorema solo puede confirmar que existe c tal que $f(c) = M$ en el intervalo, no puede decir que no existe.

Gráfica:



■

3.3 Teorema de Rolle

Teorema 3.3.1 — Teorema de Rolle.
Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), donde $f(a) = f(b)$. Entonces, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

■ **Ejemplo 3.10**
Estudie la validez del teorema de Rolle en la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 6 - x & 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en el intervalo $[0,6]$, por ser un polinomio. El valor de la función en los extremos del intervalo son iguales: $f(0) = f(6) = 0$. Para saber si $f(x)$ es derivable en (a,b), miramos a los límites laterales en el punto $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2^-)^2-4}{2^- - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{0^-}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(2^+)^2-4}{2^+ - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{0^+}{0^+} = +\infty$$

Los límites laterales no existen, entonces no existe el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$, y la función $f(x)$ no es derivable en el punto $x = 2$. Entonces, el teorema de Rolle no aplica. ■

■ **Ejemplo 3.11**
Demuestra que la función $f(x) = 4x^5 + x^3 + 7x - 2$ tiene exactamente una raíz real.

Un polinomio de grado 5 tendrá 5 raíces. Aquí queremos demostrar que solo una es real, y las otras son complejas.

Primero vemos que tiene al menos una raíz real, utilizando el teorema del valor intermedio. La función es continua por ser polinomio, y si elegimos $a = 0, b = 1$ tenemos $f(0) = -1 < 0 < 10 = f(1)$, lo cuál dice que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, existe al menos una raíz.

Para demostrar que solo hay una raíz real, podemos usar una prueba por contradicción. Asumimos que $f(x)$ tiene al menos dos raíces reales, a y b, tales que $f(a) = f(b) = 0$. Si eso es cierto, entonces por el teorema de Rolle $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Pero la derivada es $f'(x) = 20x^4 + 3x^2 + 7$, estrictamente positiva por todo x. Esto es una contradicción de antes, donde hemos dicho que existe c tal que $f'(c) = 0$. Por lo tanto, lo que hemos supuesto al principio no puede ser cierto. $f(x)$ solo tiene una raíz real. ■

Demostración 3.2
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado y acotado (completo) $[a,b]$, por el teorema de Weierstrass $f(x)$ obtiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo $m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a,b]$.
Existen dos casos:

1. $f(x)$ constante $\forall x \in [a,b]$.
   Es decir, $f(x) = f(a) = f(b) \; \forall x \in [a,b]$, entonces $f'(x) = 0 \; \forall x \in [a,b]$.
2. $f(x)$ no constante $\forall x \in [a,b]$.
   Por Weiestrass, la función $f(x)$ obtiene max/min absolutos en (a,b), y por el teorema de Fermat si $f(x)$ es derivable en (a,b) y tiene extremo, entonces $f'(c) = 0$, donde $x = c$ es un valor de x que da un extremo.

3.4 Teorema del Valor Medio (Lagrange)

Teorema 3.4.1 — Teorema del valor medio (de Lagrange).
Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.12}$$

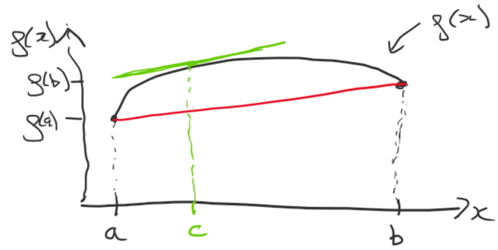


Figura 3.3: Teorema del Valor Medio (Lagrange)

Demostración 3.3
Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Sea $g(x)$ la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, con ecuación:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{3.13}$$

(la ecuación de una recta es $y - y_1 = m(x - x_1)$)

Definimos una función de la distancia entre las dos funciones:

$$h(x) = f(x) - g(x) \tag{3.14}$$

$$h(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{3.15}$$

Si la función $h(x)$ satisfecha el teorema de Rolle, podemos deducir que existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $h(x)' = 0$. Para aplicar Rolle, la función tiene que ser continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y cumplir $h(a) = h(b)$.

Continuidad: La función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ por definición. $g(x)$ es un polinomio $(a \neq b)$ continua en $[a,b]$, entonces $h(x)$ es la diferencia entre dos funciones continuas y por lo tanto es continua en $[a,b]$ también.

Derivable: La función $f(x)$ es derivable en (a,b) por definición. $g(x)$ es un polinomio $(a \neq b)$ derivable en (a,b), entonces $h(x)$ es la diferencia entre dos funciones derivables y por lo tanto es derivable en (a,b) también.

Intervalo: Tenemos,

$$h(a) = f(a) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \tag{3.16}$$

$$h(a) = 0 \tag{3.17}$$

$$h(b) = f(b) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \tag{3.18}$$

$$h(a) = 0 \tag{3.19}$$

Entonces $h(a) = h(b)$, y por lo tanto $h(x)$ satisfecha las condiciones del teorema de Rolle.
Por lo tanto $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$.
Si ahora calculamos $h'(x)$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.20}$$

En el punto c, hemos demostrado que $h'(c) = 0$:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.21}$$

Entonces,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.22}$$

■

■ Ejemplo 3.12
Determinar todos los valores c que satisfacen el teorema del valor medio para la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ en el intervalo $[-1, 2]$.

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinomio. La derivada es $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$.
Utilizando el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \\ 3c^2 + 4c - 1 &= \frac{14 - 2}{3} = 4 \\ 3c^2 + 4c - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos dos valores para $c :, c = 0{,}7863, c = -2{,}1196$. Vemos que solo un valor está dentro del intervalo. ■

■ Ejemplo 3.13
Suponemos que una función $f(x)$ es continua y derivable en el intervalo $[6, 15]$. Si también sabemos que $f(6) = -2$ y $f'(x) \leq 10$, ¿cuál es el mayor valor posible para $f(15)$?

El teorema del valor medio nos da $f(15) = f(6) + f'(c)(15 - 6) = -2 + 9f'(c)$.

Sabemos que $f'(x) \leq 10$, entonces $f'(c) \leq 10$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(15) &= -2 + 9f'(c) \\ &\leq -2 + 9(10) \\ &= 88. \end{aligned}$$

El mayor valor posible para $f(15)$ es 88. ■

3.5 Teorema Generalizado del Valor Medio (Cauchy)

Teorema 3.5.1 — Teorema generalizado del valor medio (Cauchy).
Sean f y g continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \tag{3.23}$$

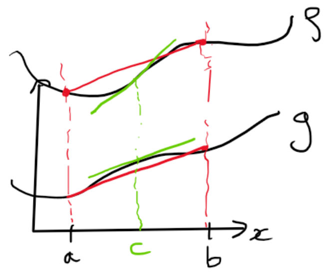


Figura 3.4: Teorema del Valor Medio (Lagrange)

■ **Ejemplo 3.14**
En una carrera de $100m$, un corredor ganó con la marca $9{,}63s$. La media de su velocidad viene dada por distancia total $d(t_2)-d(t_1)$ dividido por tiempo total t_2-t_1:

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{100-0}{9{,}63-0} = 10{,}384m/s$$

El teorema del valor medio $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dice que existe un momento $c \in (a,b)$ cuando el corredor estaba corriendo con velocidad 10.384m/s.
Otro corredor en la carrera acabó con la marca $11{,}99s$, lo cual es $11{,}99 = 1{,}245 \cdot 9{,}63$. Es decir, el primer corredor acabo con velocidad 1.245 veces la del segundo corredor. El teorema generalizado del valor medio:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}}$$

nos dice que existe un punto en el intervalo cuando el primer corredor estaba corriendo con la velocidad 1.245 veces la del segundo corredor. ■

Demostración 3.4
Sean f y g continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Definimos una ecuación auxiliar $h(x) = f(x)+\lambda g(x)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y $h(a) = h(b)$. Entonces,

$$f(a)+\lambda g(a) = f(b)+\lambda g(b) \tag{3.24}$$

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \tag{3.25}$$

Entonces desde la definición de $h(x)$:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) \tag{3.26}$$

La función $h(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser una combinación de dos funciones continuas, y es derivable en (a,b) por el mismo razonamiento. Vemos que $h(a) = h(b)$, entonces por el teorema de Rolle $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$. Si $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$, y $h'(c) = 0$:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \tag{3.27}$$

Entonces,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \tag{3.28}$$

■

Nota Si $g(x) = x$, tenemos el teorema del valor medio de Lagrange.

3.6 Regla de L'Hôpital

Definición 3.6.1

Sean f y g funciones derivables en el punto a. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad g'(x) \neq 0$$

■ **Ejemplo 3.15**

Resuelve el siguiente límite.

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} \\ lnL &= \lim_{x \to \infty} ln(x^{\frac{1}{x}}) \\ lnL &= \lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x} \\ lnL &= \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Indeterminación. Por ser funciones derivable cuando $x \to \infty$, Aplicamos L'Hôpital:

$$\begin{aligned} lnL &= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ lnL &= 0 \\ L &= 1. \end{aligned}$$

■

Demostración 3.5

■

3.7 Derivadas Útiles

3.7.1 Trigonométricas

$$f(x) = sen(x) \qquad f'(x) = cos(x) \tag{3.29}$$

$$f(x) = cos(x) \qquad f'(x) = -sen(x) \tag{3.30}$$

$$f(x) = tan(x) \qquad f'(x) = sec^2(x) \tag{3.31}$$

$$f(x) = csc(x) \qquad f'(x) = -csc(x)cos(x) \tag{3.32}$$

$$f(x) = sec(x) \qquad f'(x) = sec(x)tan(x) \tag{3.33}$$

$$f(x) = cot(x) \qquad f'(x) = -csc^2(x) \tag{3.34}$$

$$f(x) = sen^{-1}(g(x)) \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} \tag{3.35}$$

$$f(x) = cos^{-1}(g(x)) \qquad f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} \tag{3.36}$$

$$f(x) = tan^{-1}(g(x)) \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} \tag{3.37}$$

3.8 Problemas

1. ¿Son las siguientes funciones derivables?
   a.
$$\begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
2. Estudie la derivabilidad de f en $x=0$ y, si es posible, calcule la derivada de f en dicho punto.
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones

   a. $f(x) = |x|$

   b.
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
4. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $f'(x) = 2x$.
5. Hallar el punto en que $y = |x+2|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.
6. Confirme que la siguiente ecuación satisfecha el teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$, y busque $c \in [0,2] : f'(c) = 0$.
$$f(x) = x^2 + 2x$$
7. Estudie la validez del teorema de Rolle de:
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } 2 < x \leq 6 \end{cases}$$
8. Halle el valor de c para las siguientes funciones, cuando $f'(c) = 0$.
   a. $f(x) = x^3 - 4x + 1$ en $(-2,2)$.
   b. $f(x) = x^3 - 3x$ en $(-1,2)$.
9. Determine todos los valores de c para que las siguientes funciones satisfacen el teorema de Rolle
   a. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ en $[0,4]$,
   b. $q(z) = 1 - e^{z^2-9}$ en $[-3,3]$.
10. Determine todos los valores de c para que las siguientes funciones satisfacen el teorema del valor medio
    a. $g(t) = 2t^3 + t^2 + 7t - 1$ en $[1,6]$,
    b. $h(y) = 9y - 8sen(\frac{y}{2})$ en $[-3,-1]$.
11. Suponemos que $f(x)$ es continua y derivable en el intervalo $[-3,4]$, que $f(-3) = 7$ y que $f'(x) \leq -17$. ¿Cuál es el valor más grande posible para $f(4)$?
12. Halla las derivadas de las siguientes funciones utilizando la regla de la cadena

    a. $f(x) = sen(3x^6)$
    b. $f(x) = ln(cos(x))$
    c. $f(x) = cos(3^x)$
    d. $f(x) = tan(ln(x))$

13. Resuelve las siguientes límites. (L'Hôpital)

a. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$
b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xcos(x)-sen(x)}{x^3}$
c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-e^x+5}{x^3+2}$
d. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)e^{x^2}}{x^2-1}$
e. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tan(\dfrac{\pi x}{2})$
f. $\lim\limits_{x\to 1} x(1-e^{\frac{1}{x}})$

14. Calcule la derivada de las siguientes funciones
    a. $f(x)=cos(cos(cos(x)))$
    b. $f(x)=x^4e^xln(x)$
    c. $f(x)=\frac{x^2}{cos(3x^2+2)}$
15. Clasificar los puntos críticos de la función con derivada

$$f'(x)=e^{-2x}(3-x)(x+1)^2$$

16. Si $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ con derivada $g'(x)=\frac{(x+4)(-1)^2}{x-2}$, clasificar sus puntos críticos
17. Clasificar los puntos críticos de la función $f(x)=\frac{3}{5}x^5-3x^3$ y clasificar sus intervalos de convexidad/concavidad.
18. Establecer la desigualdad $sen(x)<x\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.
19. Probar que la función f definida en toda la recta real por

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}\ \ (x<0),\ \ f(x)=0\ \ (x\geq 0)$$

    es derivable y decreciente en toda la recta real.
20. Establecer la desigualdad $e^x>\frac{1}{1+x}\quad(x>0)$.
21. Usando le definición de la derivada $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, demuestra:
    a. $\frac{d}{dx}x=1$.
    b. $\frac{d}{dx}k=0. \qquad k\in\mathbb{R}$.
    c. $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$.
22. Establecer la desigualdad $\frac{x}{1+x^2}\leq tan^{-1}(x)\quad 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

IV

Tema 4 - Integración

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1subsection.1.1.2subsec

chapter.5section.5.1section.5.2subsection.5.2.1subsection.5.2.2s

4. Integración

4.1 Cálculo de integrales

Definición 4.1.1 — Primitiva.
Dada una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que que $F : I \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f en I si F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

$$F(x) = \int f(x)dx$$

4.1.1 Integrales inmediatas

Algunas integrales se pueden resolver directamente, según su forma.

Constantes

$$\int cdx = cx$$

Polinomios

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

Trigonométricas

$$\int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x))$$

Trigonométricas

$$\int sec^2(x)dx = tan(x), \qquad \int csc^2(x)dx = -cot(x)$$

Exponenciales

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$$

Cocientes

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log(|f(x)|)$$

Nota:

$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)}, sec(x) = \frac{1}{cos(x)}, cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$$

Trigonométricas Inversas

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+f(x)^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{f(x)}{a}\right) \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-f(x)^2}}dx = arcsen\left(\frac{f(x)}{a}\right) \qquad \int \frac{-f'(x)}{a^2-f(x)^2}dx = arccos\left(\frac{f(x)}{a}\right)$$

4.1.2 Propiedad de Linealidad

Definición 4.1.2 — Linealidad.
Dadas las funciones f y g de una variable real x, si $c \in \mathbb{R}$ se cumplen:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Demostración 4.1 Suponemos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, y $G(x)$ es un primitiva de $g(x)$.
$\Rightarrow$

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad G'(x) = g(x)$$

Desde las propiedades de las derivadas, tenemos:

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) \tag{4.1}$$

$$(F(x)+G(x))' = f(x)+g(x) \tag{4.2}$$

Entonces $F(x)+G(x)$ es una primitiva de $f(x)+g(x)$.

Es decir,

$$\int (f(x)+g(x))dx = F(x)+G(x) \tag{4.3}$$

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{4.4}$$

■

■ Ejemplo 4.1

$$\int (x+x^2)dx = \int xdx + \int x^2dx$$
$$\int (x+x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

■

■ Ejemplo 4.2

$$\int (3e^x)dx = 3\int e^x dx$$
$$\int (3e^x)dx = 3e^x$$

■

4.1.3 Integración por partes

Definición 4.1.3 — Integración por partes.
Dadas las funciones f y g de una variable real x, se cumple:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Ejemplo 4.3

$$\int (3t+5)\cos\left(\frac{t}{4}\right)dt$$

Definimos

$$u = 3t+5 \qquad dv = \cos\left(\frac{t}{4}\right)dt$$
$$du = 3dt \qquad v = 4\sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

Entonces,

$$\int (3t+5)\cos\left(\frac{t}{4}\right)dt = 4(3t+5)\sin\left(\frac{t}{4}\right) - 12\int \sin\left(\frac{t}{4}\right)dt$$
$$\int (3t+5)\cos\left(\frac{t}{4}\right)dt = 4(3t+5)\sin\left(\frac{t}{4}\right) + 48\cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

■

4.2 Técnicas Comunes

4.2.1 Fracciones Parciales

Integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde el orden del polinomio $Q(x)$ es más grande que el orden del polinomio $P(x)$. Descomponemos la fracción en fracciones parciales e integramos el resultado, según la siguiente tabla.

Factor en $Q(X)$	Término en la descomposición
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax+b)^k$	$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$
$(ax^2+bx+c)^k$	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$

Ejemplo 4.4

$$\int \frac{7x^2+13x}{(x-1)(x^2+4)}dx$$

Descomponer fracción: $7x^2+13x = A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1) \rightarrow$ si $x=1$, $A=4$. Si $x=0$, $4A-C=0 \rightarrow C=16$. Si $x=-1$, $-6=5A+2B-2C \rightarrow B=3$.

$$\begin{aligned}\int \frac{7x^2+13x}{(x-1)(x^2+4)}dx &= \int \frac{4}{x-1}+\frac{3x+16}{x^2+4}dx \\ &= \int \frac{4}{x-1}+\frac{3x}{x^2+4}+\frac{16}{x^2+4}dx \\ &= 4ln|x-1|+\frac{3}{2}ln(x^2+4)+8tan^{-1}(\frac{x}{2})+D\end{aligned}$$

■

4.2.2 Substituciones Trigonométricas

Si la integral incluye la siguiente raíz, aplica la sustitución dada:

$\sqrt{a^2-b^2x^2} \Rightarrow x=\frac{a}{b}sen\theta$ $cos^2\theta = 1-sen^2\theta$	$\sqrt{b^2x^2-a^2} \Rightarrow x=\frac{a}{b}sec\theta$ $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$	$\sqrt{a^2+b^2x^2} \Rightarrow x=\frac{a}{b}tan\theta$ $sec^2\theta = 1+tan^2\theta$

■ **Ejemplo 4.5**

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{4sen^2t}{\sqrt{4-4sen^2t}}2costdt \quad (x=2sent\ dx=2costdt)\\
&= \int \frac{8sen^2tcost}{2cost}dt\\
&= \int 4sen^2tdt\\
&= 2\int (1-cos2t)dt \quad (cos2t = 1-2sen^2t)\\
&= 2t - sen2t + C\\
&= 2t - 2sentcost + C\\
&= 2arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C \quad \left(x=2sent \to cost = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 4.6**

Resolver la integral

$$\int x^3(3x^2-4)^{\frac{5}{2}}dx$$

Utilizamos la sustitución del tipo $\sqrt{b^2x^2-a^2}, x=\frac{a}{b}sec(t)$ con la identidad $tan^2t = sec^2t-1$.
Si $x=\frac{2}{\sqrt{3}}sec(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{\sqrt{3}}sec(t)tan(t)dt$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int x^3(3x^2-4)^{\frac{5}{2}}dx &= \int 2^5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 sec^3(t)tan^5(t)\frac{2}{\sqrt{3}}sec(t)tan(t)dt\\
&= \frac{512}{9}\int sec^4(t)tan^6(t)dt\\
&= \frac{512}{9}\int (tan^2(t)+1)sec^2(t)tan^6(t)dt
\end{aligned}
$$

Si utilizamos el cambio $u=tan(t), \quad du = sec^2(t)dt$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= \frac{512}{9}\int (u^2+1)u^6du\\
&= \frac{512}{9}\left[\frac{1}{9}tan^9(t)+\frac{1}{7}tan^7(t)\right]+C
\end{aligned}
$$

Para deshacer el cambio: $x=\frac{2}{\sqrt{3}}sec(t)$. Sabemos que $secante = \frac{hipotenusa}{adyacente}$ (pintar el triangulo). Podemos reemplazar $tan(t)$ utilizando $tangente = \frac{opuesto}{adyacente}$. Entonces $tan(t) = \frac{\sqrt{3x^2-4}}{2}$.

$$\Rightarrow \int x^3(3x^2-4)^{\frac{5}{2}}dx = \frac{512}{9}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3x^2-4}}{2}\right)^9 + \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{3x^2-4}}{2}\right)^7\right]+C$$

■

4.2.3 Productos y fracciones trigonométricas

For $\int sen^n x cos^m x dx$ we have the following:

1. n impar. Sacar un seno, y convertir el resto a coseno. Aplica sustitución $u = cos(x)$.

2. m impar. Sacar un coseno, y convertir el resto a seno. Aplica sustitución $u = sen(x)$.

3. n y m impar. Aplica 1. o 2.

4. n y m par. Aplica transformaciones de doble o mitad angulo para reducir la integral.

■ **Ejemplo 4.7**

$$\begin{aligned}\int sen^3 x cos^2 x dx &= \int senx sen^2 x cos^2 x dx \\ &= \int senx(1-cos^2 x)cos^2 x dx \\ = \int -(1-u^2)u^2 du \quad &(u = cosx \;\; du = -senxdx) \\ &= -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\frac{1}{3}cos^3 x + \frac{1}{5}cos^5 x + C\end{aligned}$$

■

For $\int tan^n x sec^m x dx$ we have the following:

1. n impar. Sacar un tangente y un secante, y convertir el resto a secante con $tan^2 x = sec^2 x - 1$. Aplica sustitución $u = sec(x)$.

2. m par. Sacar 2 secantes y convertir el resto a tangentes con $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$. Aplica sustitución $u = tan(x)$.

3. n impar m par. Aplica 1. o 2.

4. n par m impar. Cada integral se trata distinto.

■ **Ejemplo 4.8**

$$\begin{aligned}\int tan^3 x sec^5 x dx &= \int tan^2 x sec^4 x tanx secx dx \\ &= \int (sec^2 x - 1)sec^4 x tanx secx dx \\ = \int (u^2-1)u^4 du \quad &(u = secx \;\; du = tanxsecxdx) \\ &= \frac{1}{7}sec^7 x - \frac{1}{5}sec^5 x + C\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 4.9**

Algunos fracciones también...

$$\begin{aligned}\int \frac{sen^5 x}{cos^3 x}dx &= \int \frac{sen^4 x senx}{cos^3 x}dx \\ &= \int \frac{(sen^2 x)^2 senx}{cos^3 x}dx \\ &= \int \frac{(1-cos^2 x)^2)senx}{cos^3 x}dx \\ &= \int -\frac{(1-u^2)^2}{u^3}du \quad (u = cosx \;\; du = -senx) \\ &= -\int \frac{1-2u^2+u^4}{u^3}du \\ &= \frac{1}{2}sec^2 + 2ln|cos(x)| - \frac{1}{2}cos^2 x + C\end{aligned}$$

■

4.3 Integrales Definidas

Definición 4.3.1

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Representamos por $G(f,a,b)$ la región entre $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

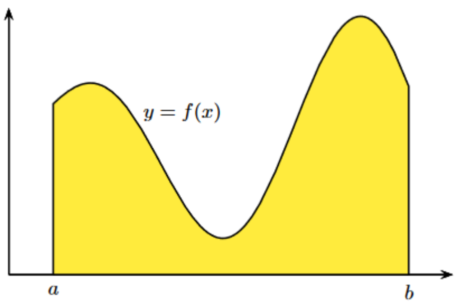


Figura 4.1: Integral Definida

El objetivo es calcular el área de la región $G(f,a,b)$. La idea de la integral es de dividir la región en regiones simples, de las cuales es fácil calcular su área, y sumar.

4.3.1 Integral de Riemann

La aproximación de una integral por la suma finita de regiones simples se puede conseguir usando **sumas de Riemann**.

Definición 4.3.2 — Suma de Riemann.
Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo compacto $[a,b]$, y elijamos un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en cada uno de los intervalos de la misma. El número:

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama una **suma de Riemann** de f para la partición P.

La **norma infinita** de la partición P es:

$$||P||_\infty = \text{máx}\{\Delta x_1, \Delta x_x, \ldots, \Delta x_n\}$$

Denotaremos por $\mathscr{P}[a,b]$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Los puntos t_k en la formulación de la suma de Riemann cambian su valor. Si escogemos los extremos de los sub-intervalos de la partición de $[a,b]$, acabamos con la **suma inferior** y **suma superior** de Riemann.

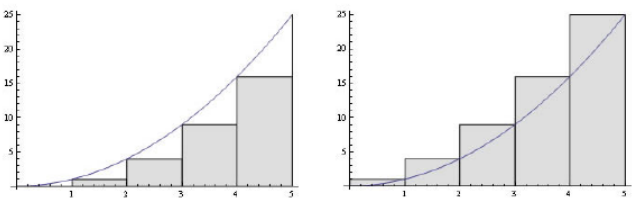


Figura 4.2: Suma inferior y superior de Riemann

Definición 4.3.3
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P \in [a,b]$ con $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Sean

$$M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k]$$

$$m_k = \text{ínf}\, f[x_{k-1}, x_k].$$

Las sumas:
$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$
se llaman, respecitvamente, **suma superior** y **suma inferior** de Riemann de f para la partición P.

También existen los métodos:
Suma de Riemann por la derecha: Donde $t_k = x_k\ \forall k$.
Suma de Riemann por la izquierda: Donde $t_k = x_{k-1}\ \forall k$.
Suma de Riemann por la media: Donde $t_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\ \forall k$.

■ **Ejemplo 4.10**
¿Cuál es la norma de la partición $P = \{-5, -4{,}3, -3{,}2, -2{,}3, -1{,}8, -1\}$?

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= -4{,}3 - -5 & \Delta x_2 &= -3{,}2 - -4{,}3 & \Delta x_3 &= -2{,}3 - -3{,}2 & \Delta x_4 &= -1{,}8 - -2-3 & \Delta x_5 &= -1 - -1{,}8\\ &= 0{,}7 & &= 1{,}1 & &= 0{,}9 & &= 0{,}5 & &= 0{,}8\end{aligned}$$

$\Rightarrow$
$$||P|| = 1{,}1$$

■

■ **Ejemplo 4.11**
Aproximar $\int_{-1}^{4}(16 - x^2)dx$ con la suma de Riemann a la derecha.
Defino la partición $P = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, donde $\Delta x_i = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ y $t_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Si $f(x) = 16 - x^2 \quad \rightarrow \quad f(0) = 16, f(1) = 15, f(2) = 12, f(3) = 7, f(4) = 0$
Entonces,

$$\begin{aligned}\sigma(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})\\ \sigma(f,P) &= 16 + 15 + 12 + 7 + 0\\ \sigma(f,P) &= 50\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 4.12**
Aproximar $\int_{-1}^{4}(16 - x^2)dx$ con la suma superior de Riemann.
Defino la partición $P = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, donde $\Delta x_i = \{1, 1, 1, 1, 1\}$. Para la suma superior de Riemann, $M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k]$.
Primero, en $k = 1 : [-1, 0]$, vemos que la función es creciente. Entonces $t_1 = x_1 = 0$.
Para $k = 2, \ldots, 5$. tenemos $f(x)$ creciente en $[0, 4]$, entonces $t_k = x_{k-1}\ k = 2, 3, 4, 5$. Por lo tanto $t_i = \{0, 0, 1, 2, 3\}$.
Calculamos $M_k = f(t_k)$ y resolvemos la suma de Riemann:
Entonces,

$$\begin{aligned}U(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})\\ U(f,P) &= 16 + 16 + 15 + 12 + 7\\ U(f,P) &= 66.\end{aligned}$$

■

Nota: Para cada $P \in \mathscr{P}$ y cada función f, es claro que $L(f,P) \leq U(f,p)$.

Definición 4.3.4 — Integral de Riemann.
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, y sea C_i un punto en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con tamaño Δx_i de una partición $P \in \mathscr{P}$. Si el límite de la suma de Riemann

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

existe, denotaremos este límite por

$$\int_a^b f(x)dx$$

y lo llamaremos la **integral de Riemann** de f entre a y b. En este caso, f es **integrable Riemann**.

Desde esta definición, vemos que una función f es integrable Riemann si y solo si el límite de la suma de Riemann superior e inferior son iguales.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} L(f,P) = \lim_{\Delta x_i \to 0} U(f,P)$$

y el valor de este límite es el valor del límite.

Al conjunto de todas las funciones integrables Riemann en un intervalo $[a,b]$ se le denotará $\mathscr{R}[a,b]$. Desde esta definición tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si y sólo si existe una sucesión $\{P_n\}_n \subset \mathscr{P}[a,b]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} [U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0$.
Además, en ese caso, se cumple también que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n). \tag{4.5}$$

Nota

En la práctica, se suele tomar $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ la partición del intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, es decir, $P_n = \{a + \frac{k}{n}(b-a) : \ k = 0,1,\ldots,n\}$.

Fórmulas de Faulhaber

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

■ **Ejemplo 4.13**

Calcular $\int_{-1}^{4} (16 - x^2)dx$ con la integral Riemann.
Definimos la partición $P = \{a + i\Delta x\}$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5}{n}$. Entonces,

$$\int_{-1}^{4} (16 - x^2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_{-1}^{4} (16 - x^2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(16 - (-1 + \frac{5i}{n})^2\right) \frac{5}{n}$$

$$\int_{-1}^{4}(16-x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{75}{n}+\frac{50i}{n^2}-\frac{125i^2}{n^3}$$

$$\int_{-1}^{4}(16-x^2)dx = \lim_{n\to\infty} 75+\frac{50}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{125}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\int_{-1}^{4}(16-x^2)dx = \lim_{n\to\infty} 75+\frac{50}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{125}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\int_{-1}^{4}(16-x^2)dx = \lim_{n\to\infty} 75+25(1+\frac{1}{n})-\frac{125}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\int_{-1}^{4}(16-x^2)dx = 75+25-\frac{125}{3}=58.\dot{3}.$$

■

4.3.2 Integrabilidad

■ Ejemplo 4.14

La función $f=1$ es integrable Riemann en $[0,1]$, y $\int_a^b 1dx = 1$.

Para demostrar esto, sea $P=\{I_1,I_2,\ldots,I_n\}$ una partición de $[0,1]$ con extremos $\{0,x_1,\ldots,x_{n-1},1\}$. Si f es constante, $M_k=\sup f[x_{k-1},x_k]=1, m_k=\inf f[x_{k-1},x_k]=1, \quad \forall k=1,\ldots,n$. Entonces $U(f,P)=L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} x_k-x_{k-1}=x_n-x_0=1$.

Si la suma inferior y superior de Riemann son iguales, la función es integrable Riemann y tiene valor $\int_a^b 1dx = 1$. ■

Definición 4.3.5 — Condiciones suficientes de integrabilidad de Riemann.

i.) Si f es monótona en $[a,b]$, es integrable.
ii.) Si f es continua en $[a,b]$, es integrable.

■ Ejemplo 4.15

Define $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x\le 1,\\ 0 & \text{si} \quad x=0.\end{cases}$$

Si consideremos la partición P como $0<x_1<\ldots<x_{n-1}<1$ del intervalo $[0,1]$, entonces $\sup_{[0,x_1]} f=\infty$.
La suma superior de Riemann no esta bien definida porque la función f no está acotada, entonces la integral $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ no es integrable Riemann. ■

Proposition 4.3.1

Si f está acotada en $[a,b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, es integrable.

■ Ejemplo 4.16

Calcular $\int_0^2 f(x)dx$ de la función:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases} \tag{4.6}$$

La función no es continua en el intervalo $[0,2]$, por tener una discontinuidad de salta finito en $x=1$ con tamaño 1. (límite izq es 1, der es 2).

Aun así consideremos la partición P de $[0,2]$ de tamaño $\Delta x = \frac{2}{n}$. La suma por la media es $\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n/2} 1\frac{2}{n} + \sum_{i=1+n/2}^{n} 2\frac{2}{n}$ donde $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n}$, $\sum_{1+\frac{n}{2}}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(n-\frac{n}{2})$.

Los índices de la sumas vienen de $c_i \in [0,1]$ $i=1,\dots,\frac{n}{2}$, y $c_i \in (1,2]$ $i=1+\frac{n}{2},\dots,n$.

Entonces $\sigma(f,P) = \frac{2}{n}\frac{n}{2} + \frac{4}{n}(n-\frac{n}{2}) = 3$. Cuando tomamos límites $n \to 0$ (o bien $\Delta x \to 0$), $lim_{\Delta x \to 0}\sigma(f,P) = 3$. Por lo tanto, el límite existe y la función $f(x)$ es integrable Riemann. ■

■ **Ejemplo 4.17**

Calcular $\int_0^1 f(x)dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \text{ y es irracional} \end{cases} \tag{4.7}$$

Esta función tiene infinitas discontinuidades es el intervalo $[0,1]$. Demostramos que no es integrable Riemann. Tomamos la partición P con tamaño Δx. Cada subintervalo $x_i - x_{i-1}$ contiene números racionales e irracionales. Por lo tanto, el mínimo de f en cada subintervalo sería 0, y el máximo sería 1. Calculando sumas superiores e inferiores de Riemann: $L(f,P) = \sum m\Delta x, U(f,P) = \sum M\Delta x$, $\to L(f,P) = 0, U(f,P) = 1$. Entonces, los límites de las sumas inferiores y superiores son distintos, por lo tanto la función no es integrable Riemann. ■

Definición 4.3.6

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, $f \in \mathscr{R}[a,b]$ con $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Consideremos el conjunto $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Se define el área de S como $A(S) = \int_a^b f(x)dx$.

Si fuese $f(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$, entonces el área sería $A(S) = -\int_a^b f(x)dx$.

4.3.3 Propiedades

Definición 4.3.7 — Linealidad.

Si f,g son integrables en $[a,b]$ y α,β son números reales, se verifica que la función $\alpha f + \beta g$ también es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$$

Demostración 4.2

Desde la definición de la integral definida, tenemos

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(x_i^*) + \beta g(x_i^*))\Delta x \tag{4.8}$$

donde x^* es la partición del dominio de la función

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha f(x_i^*)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} \beta g(x_i^*)\Delta x \right) \tag{4.9}$$

porque las dos sumas son convergentes

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha f(x_i^*)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta g(x_i^*)\Delta x \tag{4.10}$$

porque son límites convergentes. Entonces, por definición:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx \tag{4.11}$$

■

Definición 4.3.8 — Monotonía de la Integral.
Si f,g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

Definición 4.3.9 — Aditividad respecto del intervalo.
Sea $a < c < b$. Una función f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, en cuyo caso se verifica la igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4.4 Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 4.4.1 — El teorema Fundamental del Cálculo. Dada una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos definir una nueva función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para todo $x \in [a,b]$. Entonces:

i.) F es continua en $[a,b]$,
ii.) F es derivable en (a,b),
iii.) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

■ **Ejemplo 4.18**
Busca la derivada de $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt$
Usando el teorema:

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

■

Cuando los límites de la integral no son de un constante y x, hay que hacer un cambio del orden o usar la regla de la cadena. Por ejemplo $\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \sin t dt$.
Vamos a definir $F(x) = \int_0^x \sin t dt$, entonces según el teorema $F'(x) = \sin x$. Usando la definición de F, tenemos $F(x^3) = \int_0^{x^3} \sin t dt$, y que $\frac{d}{dx}F(x^3) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \sin t dt$.
Usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \sin t dt = F'(x^3)\cdot\frac{d}{dx}(x^3)$$
$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \sin t dt = \sin(x^3)\cdot 3x^2.$$

■ **Ejemplo 4.19**

Busca la derivada de $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t dt$

Deja que $u(x) = \sqrt{x}$

$$F(x) = \int_1^{u(x)} \sin t dt$$

Usando el teorema, y la regla de la cadena

$$F'(x) = \sin(u(x))\frac{du}{dx}$$

$$F'(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

■

■ **Ejemplo 4.20**

Busca la derivada de $F(x) = \int_x^{2x} t^3 dt$

Separamos en dos integrales:

$$F(x) = \int_x^0 t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt$$

$$F(x) = -\int_0^x t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt$$

$$F'(x) = -x^3 + \int_0^{2x} t^3 dt$$

Si $u(x) = 2x$, defino $G(x) = \int_0^{u(x)} t^3 dt$.

Entonces $G'(x) = (2x)^3\frac{d(2x)}{dx}$ $\Rightarrow$

$$F'(x) = 15x^3$$

■

Demostración 4.3 — El teorema Fundamental del Cálculo.

Por definición:

$$F'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} \tag{4.12}$$

Sea $h > 0$, entonces

$$F(c+h)-F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt \tag{4.13}$$

Se define m,M como

$$m = \inf\{f(x)|c \leq x \leq c+h\} \tag{4.14}$$

$$M = \sup\{f(x)|c \leq x \leq c+h\} \tag{4.15}$$

Por ser integrable Riemann, $f(x)$ está acotada en $[a,b]$, entonces por Weierstrass $m \leq f(x) \leq M$. Integrando en el intervalo $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$ llegamos a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces,

$$mh \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq Mh \tag{4.16}$$

Por lo tanto,

$$m \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M \tag{4.17}$$

Ahora, sea $h < 0$, entonces sean

$$m^* = \text{ínf}\{f(x)|c+h \leq x \leq c\} \tag{4.18}$$

$$M^* = \sup\{f(x)|c+h \leq x \leq c\} \tag{4.19}$$

Tenemos que

$$m^*(-h) \leq \int_{c+h}^{c} f(t)dt \leq M^*(-h) \tag{4.20}$$

Como $\quad F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f(t)dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)dt$

Entonces,

$$M^*h \leq F(c+h) - F(c) \leq m^*h \tag{4.21}$$

$h < 0$, entonces

$$m^* \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M^* \tag{4.22}$$

f continua en c, $\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} m^*, M^*, m, M = f(c)$

Desde (4.17)(4.22)$\Rightarrow$

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c) \tag{4.23}$$

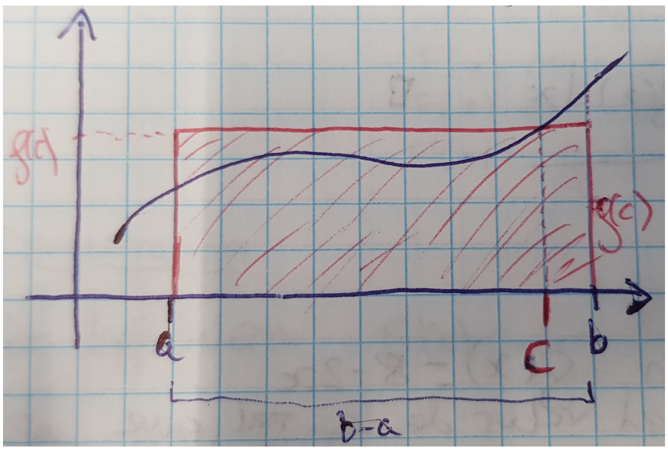
■

4.5 El teorema del valor medio para integrales

Teorema 4.5.1 — Teorema del valor medio (integrales). Sea f una función continua en $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{4.24}$$

Significado



Una función definida en un intervalo cerrado alcance su valor medio en algún punto dentro del intervalo

Demostración 4.4 Dada que f es continua en $[a,b]$, entonces f obtiene su máximo y mínimo en $[a,b]$. (Weierstrass)
$\Rightarrow$

$$\exists \ c,d \in [a,b] \ : \ f(c) = m, \ f(d) = M \ \text{ tal que:}$$

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Integrando:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \qquad \forall x \in [a,b] \tag{4.25}$$

Se puede integrar porque si $f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Entonces,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad \forall x \in [a,b] \tag{4.26}$$

$$f(c) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M = f(d) \tag{4.27}$$

Definimos $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ y $G(x) = f(x) - K$.

Aplicamos el teorema de Bolzano:

Si tenemos $c,d \in [a,b]$

$$G(c) = f(c) - K \tag{4.28}$$

$$G(c) = m - K \leq 0 \tag{4.29}$$

$$G(d) \geq 0 \tag{4.30}$$

Si $G(c)$ o $G(d)$ es igual a cero, entonces $\Rightarrow \ m = k$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.31}$$

Si $G(c) \neq 0$ y $G(d) \neq 0$, entonces $G(c) < 0$ y $G(d) > 0$.

$G(x)$ es el resto de la función continua y un constante, lo cual significa que $G(x)$ también es continua en $[a,b]$.

Entonces por Bolzano, $\exists \ \alpha \in [a,b] : \ G(\alpha) = 0$
$\Rightarrow$

$$f(\alpha) - K = 0 \tag{4.32}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.33}$$

■

■ **Ejemplo 4.21**
Busca el valor medio de la función $f(x) = 8 - 2x$ en el intervalo $[0,4]$, y identificar el valor de c tal que $f(c)$ es igual al valor medio en $[0,4]$.

Usando el teorema:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$f(c) = \frac{1}{4-0}\int_4^0 8-2xdx$$
$$f(c) = \frac{1}{4}[8x-x^2]_0^4$$
$$f(c) = 4$$

Entonces

$$8-2c = 4$$
$$c = 2$$

■

4.6 Regla de Barrow

Teorema 4.6.1 — Regla de Barrow. Sea f una función continua en $[a,b]$ y F una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a) \tag{4.34}$$

Demostración 4.5 Por el teorema del cálculo, sabemos que $G(x) = \int_a^x f dx$ es una primitiva de f, entonces

$$G'(x) = f(x) \tag{4.35}$$

Por hipótesis, F también es una primitiva de f: $F'(x) = f(x)$.

Sabemos que dos primitivas de la misma función se diferencian, a lo sumo, en una constante. Es decir,

$$G(x) = F(x) + c \tag{4.36}$$

Si evaluamos $x = a$
$\Rightarrow$

$$G(a) = F(a) + c \tag{4.37}$$

Pero $G(a) = \int_a^a f dx = 0$
$\Rightarrow$

$$0 = F(a) + c \tag{4.38}$$
$$c = -F(a) \tag{4.39}$$

Entonces tenemos $G(x) = F(x) - F(a)$
Evaluamos en $x = b$
$\Rightarrow$

$$G(b) = F(b) - F(a) \tag{4.40}$$

Tenemos $G(b) = \int_a^b f dx$
$\Rightarrow$

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a) \tag{4.41}$$

4.7 Cambio de variables

Teorema 4.7.1 — Cambio de variables. Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b) con $\varphi' \in \mathscr{R}[a,b]$ y sea $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ continua en $\varphi([a,b])$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{4.42}$$

Cambios de variable típicos:

$$\begin{aligned}
\int F(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int F(u)du, \text{ donde } u = ax+b\\
\int F(\sqrt{ax+b})dx &= \frac{2}{a}\int u\cdot F(u)du, \text{ donde } u = \sqrt{ax+b}\\
\int F(\sqrt[n]{ax+b})dx &= \frac{n}{a}\int u^{n-1}\cdot F(u)du, \text{ donde } u = \sqrt[n]{ax+b}\\
\int F(\sqrt{a^2+b^2})dx &= a\int F(a\cdot cos(u))du, \text{ donde } u = a\cdot sin(u)\\
\int F(e^{ax})dx &= \frac{1}{a}\int \frac{F(u)}{u}du, \text{ donde } u = e^{ax}\\
\int F(ln(x))dx &= \int e^u F(u)du, \text{ donde } u = ln(x)
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.22**
Resolver la integral

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$

Defino $\varphi = 2x+1$ y $d\varphi = 2dx$. Entonces $x = \frac{t-1}{2}, dx = \frac{dt}{2}$. Los límites nuevos son $\varphi(0) = 1, \varphi(4) = 9$. La integral se cambia a:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^9 \frac{\frac{\varphi-1}{2}}{2\sqrt{\varphi}}d\varphi$$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{4}\int_1^9 \frac{\varphi-1}{\sqrt{\varphi}}d\varphi$$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\varphi^{\frac{3}{2}} - 2\varphi^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{10}{3}.$$

■

4.8 Integrales definidas por partes

Teorema 4.8.1 — Integración por partes. Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b) con

$f', g' \in \mathscr{R}[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \tag{4.43}$$

■ **Ejemplo 4.23**

■

4.9 Integrales impropias

4.9.1 Límites de integración infinitos

Definición 4.9.1 — Integrales Impropias.
La **integral impropia** de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$ es la integral donde a, b o ambos tienden a $\pm\infty$, y se calcule por el límite de la regla de Barrow.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} (F(b) - F(a)). \tag{4.44}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} (F(b) - F(a)). \tag{4.45}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \tag{4.46}$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

En el caso de que existan los límites y sean finitos, se dice que la integral impropia converge y tiene como valor dicho límite. En el caso de que no existan o sean infinitos, se dice que diverge.

■ **Ejemplo 4.24**
Calcular $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$.

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^{-x^2}dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_t^0 + \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t$$

$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

La integral converge y tiene valor 0. ■

■ **Ejemplo 4.25**
Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^c}dx$ con $c \in \mathbb{R}$.

En el caso $c \neq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-c}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right]_1^b == \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-c}\left[\frac{1}{b^{c-1}} - 1\right].$$

Entonces, si $c > 1$, tenemos que $c - 1 > 0$, con lo que $\frac{1}{b^{c-1}} \to 0$ cuando $b \to \infty$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}dx = \frac{1}{c-1} \qquad \text{si } c > 1.$$

la integral converge.
Si $c < 1$, tenemos que $c - 1 < 0$, con lo que $\frac{1}{b^{c-1}} \to \infty$ cuando $b \to \infty$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c} dx = \infty \qquad \text{si } c < 1.$$

la integral diverge.
Cuando $c = 1$, tenemos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \Big[ln(x) \Big]_1^b$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

la integral diverge. ■

Condición de convergencia

Definición 4.9.2 — Límites infinitos - Condición de convergencia.
Para que la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ sea convergente, es necesario tener $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4.9.2 Integrandos infinitos

Sea $f(x)$ continua en $[a,b)$ y que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ (o $-\infty$). Entonces se define la integral impropia:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx \tag{4.47}$$

Si dicho límite existe y es finito, se dice que la integral impropia es convergente y su valor es dicho límite.

Análogamente, Sea $f(x)$ continua en $(a,b]$ y que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (o $-\infty$). Entonces se define la integral impropia:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx \tag{4.48}$$

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, excepto en un punto $c \in (a,b)$ y tal que $\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty$. Entonces se define la integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.49}$$

■ **Ejemplo 4.26**
Resolver la integral

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

La función tiene un asíntota vertical en el punto $x = 3$, por lo tanto consideramos el límite en el extremo superior.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx \\
&= \lim_{t\to 3^-} \Big[-2\sqrt{3-x} \Big]_0^t \\
&= \lim_{t\to 3^-} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3-t}) \\
&= 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

El límite existe y es finito, entonces la integral es convergente y tiene valor $2\sqrt{3}$. ■

■ **Ejemplo 4.27**
Resolver la integral

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} dx$$

La función tiene un asíntota vertical en el punto $x = 0$, por lo tanto partimos la integral en dos y consideramos los límites laterales.

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^3} dx$$

La primera,

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{t \to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{x^3} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-2}^{t} \\
&= \lim_{t \to 0^-} \frac{-1}{2(-2)^2} - \frac{1}{4t^4} \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

La primera parte de la integral $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^3} dx$ es divergente, por lo tanto la integral no converge. ■

Teorema 4.9.1 — Criterio de comparación. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, x]$. Si existe $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in [a, +\infty)$ se tiene que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ y además g es continua en $[a, +\infty)$, entonces:

1. Si $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ convergente, entonces $\int_{a}^{\infty} g(x) dx$ convergente.
2. Si $\int_{a}^{\infty} g(x) dx$ divergente, entonces $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ divergente.

Nota: El criterio anterior se aplica a integrales impropias de los dos tipos anunciados.

■ **Ejemplo 4.28**
Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x - e^{-x}} dx$$

Defino $g(x) = \frac{1}{x}$, tal que $g(x) < \frac{1}{x - e^{-x}}$ $\forall x \in [3, \infty)$. Estudiando la convergencia de la integral impropia de $g(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \to \infty} \int_{3}^{t} \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{t \to \infty} \Big[ln(x) \Big]_{3}^{t} \\
&= \lim_{t \to \infty} ln(t) - ln(3) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

La integral impropia de $g(x)$ en $[3, \infty)$ diverge, entonces por el criterio de comparación, $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x - e^{-x}} dx$ también diverge. ■

■ **Ejemplo 4.29**
Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^4+2x^2}dx$$

Busco una función $g(x)$ tal que $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [1,\infty)$.
Si sumamos 1 a la integral y simplificamos, tenemos $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3+2x}dx$. Si quitamos $2x$ del denominador (haciendo la función aun más grande que $f(x)$), llegamos a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$, que cumple $\frac{1}{x^3} \geq \frac{x-1}{x^4+2x^2}\ \forall x \in [1,\infty)$.

Si estudiamos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{2t^2}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ converge. Por la criterio de comparación, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3+2x}dx$ también converge. ■

4.10 Problemas

1. Aproximar $\int_0^{\pi/2} cosdx$ con sumas de Riemann. Identificar una partición del intervalo, dar su norma y aproximar la integral.
2. Aproximar $\int_{-1}^{4} 16-x^2dx$ con la suma de Riemann a la izquierda, con $P=\{-1,0,1,2,3,4\}$.
3. Calcular la suma de Riemann de la función $f(x)=5x-2$ con $P=\{1,3,6,7\}$ usando $t_i=\{2,5,7\}$.
4. Calcular la integral $\int_1^7 5x-2dx$ con la suma de Riemann.
5. Hallar las sumas superior e inferior de Riemann de la función $f(x)=x^2+1$ en el intervalo $[0,2]$ con:
   a. 4 sub-intervalos
   b. 6 sub-intervalos
6. Considerar la función $g(x)=sen(x)$ en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$. Usando una partición del intervalo adecuado, demuestra que $g(x)$ es integrable Riemann en $[0,\frac{\pi}{2}]$ con dos métodos:
   a. Demuestra que $g(x)$ satisfecha las condiciones de integrabilidad Riemann.
   b. Calcular las sumas superior e ingerior de Riemann y evaluar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx$.
7. Considerar la función $g(x)=cos(x)$ en el intervalo $[\frac{\pi}{2},\pi]$.
   a. Demuestra que $g(x)$ satisfecha las condiciones de integrabilidad Riemann.
   b. Hallar $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)dx$.
8. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leq x<1,\\ 2, & x=1\end{cases}$$

   Demuestra que $f(x)$ es integrable Riemann en $[0,1]$ con los métodos:
   a. Demuestra que $f(x)$ satisfecha las condiciones de integrabilidad Riemann.
   b. Evaluar las sumas superior e inferior de Riemann.
9. Estudiar para que valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ es convergente la integral de la función $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ en el intervalo $[a,\infty)$, con $\alpha>0$.
10. Calcular la derivada de $F(x)=\int_1^{x^3} cos(t)dt$.
11. Calcular la derivada de $g(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{sen^2(x)+2}dt$.
12. Calcular la derivada de $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x}(t^2-t)t$.
13. Hallar la derivada de las siguientes funciones
   a.

$$F(x)=\int_0^{\int_1^x tdt} t^3dt$$

   b.

$$G(x)=\int_{\int_1^{x^2} tdt}^{\int_0^{cos(2x)} tdt} t^2dt.$$

14. Hallar $c\in[0,3]$ tal que $f(c)$ es el valor medio de $\int_0^3 x^2dx$.
15. Hallar el valor medio de la función $f(x)=\frac{\pi}{6}$ en el intervalo $[0,6]$ y el valor de c tal que $f(c)$ es igual a dicho valor medio en $[0,6]$.
16. Evaluar $\int_0^2(x^3-x^2)dx$.

17. Sea $p \in \mathbb{N}$ y sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} sen^{2p} t dt.$$

Demuestra que $f(x)$ es creciente y acotada por arriba por 1.

18. Resolver las siguientes integrales

a. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

b. $$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

c. $$\int_{-2}^{\infty} sen(x) dx$$

d. $$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

e. $$\int_{-2}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

f. $$\int_0^{\infty} \frac{1}{z(lnz)^2} dx$$

19. Hallar las siguientes integrales.

a. $$\int \frac{sen(ln(4x-2))}{2x-1} dx$$

b. $$\int (e^{-x}-1) cos(e^{-x}+x) dx$$

c. $$\int \frac{4x^2-5x}{x^3-3x^2+4} dx$$

d. $$\int \frac{1+3ln+(lnx)^3}{x(1-lnx)^2} dx$$

e. $$\int \frac{xarcsenx}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

f. $$\int x^2 sen(2x) dx$$

20. En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan la integral $\int 2senxcosxdx$.

a. Cristina la resolvió con el cambio de variable $u = senx$.
b. Carlos la resolvió con el cambio de variable $u = cosx$.
c. Pablo lo hizo con la transformación $sen2x = 2senxcosx$.

Aunque los tres alumnos dieron respuestas distintas, el profesor les dijo que los tres la habían hecho bien. Encuentra las tres respuestas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

21. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales

a. $$\int_2^{\infty} \frac{cos^2(x)}{x^2} dx$$

b. $$\int_3^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx$$

c. $$\int_1^{\infty} \frac{1+3sen^4(2x)}{\sqrt{x}} dx$$

d. $$\int_2^{\infty} \frac{1+cos^2(x)}{\sqrt{x}\left[2-sen^4(x)\right]} dx$$

e. $$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

V

Tema 5 - Sucesiones y series de funciones

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1subsection.1.1.2subsec

chapter.6section.6.1subsection.6.1.1subsection.6.1.2section.6.2s

5. Sucesiones y series de funciones

5.1 Sucesiones de funciones

Definición 5.1.1 — Sucesión de funciones.
Una **sucesión de fuciones** es una aplicación que a cada $n \in \mathbb{N}$ se asigna una función f_n.

Ejemplo 5.1
Consideremos las sucesiones de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

a. $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$,
b. $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

■

Definición 5.1.2
Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones reales en $x \in X$ es **puntualmente acotada** si la sucesión numérica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada para cada $x \in X$.

Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones reales en X es **uniformemente acotada** si existe $M \geq 0$ tal que:

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \forall x \in X,\ y\ n \in \mathbb{N}$$

Definición 5.1.3
Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones reales en X es **monótona creciente** (resp. decreciente) si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (resp. $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$) para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 5.1.4 — Convergencia Puntual.
Dado $x \in I$, se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en x si la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad x \in X$$

se denomina **límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

Definición 5.1.5 — Campo de Convergencia Puntual.
El conjunto C de todos los puntos $x \in I$ tales que $\{f_n\}$ sea convergente puntualmente se llama el **campo de convergencia puntual**.

$$C = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$$

Definición 5.1.6 — Convergencia Uniforme.
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales en $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que la sucesión es **uniformemente convergente** si existe una función f en X tal que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \ \forall x \in X$$

Proposition 5.1.1
Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones reales que converge puntualmente en un conjunto X hacia la función f. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$m_n = sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\}$$

Son equivalentes los siguientes asertos:
i) La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en X hacia f,
ii) Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \geq n_0$ y la sucesión $\{m_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ converge hacia 0.

Teorema 5.1.1 — Continuidad del límite puntual.
Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en X hacia la función f. Si $x_0 \in X$ es tal que f_n es continua en x_0 para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en x_0.

En consecuencia, si f_n es continua en X para cada $n \in \mathbb{N}$, la función límite f es continua en X.

■ **Ejemplo 5.2**
Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = x^n,\ \ x \in [0,1]$$

Es sencillo ver que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

entonces es convergente puntualmente en $x \in [0,1]$.

Si hubiera convergencia uniforme en el intervalo $[0,1]$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ debería existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \ \text{ si } x \in [0,1],\ n \geq n_0$$

Esto es falso. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si definimos $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$ se tiene que

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n^n = \frac{1}{2}$$

Otra manera de contestar es considerar el teorema de continuidad. Las funciones f_n son continua, pero f no lo es, entonces la convergencia no es uniformemente en $[0,1]$. ■

■ **Ejemplo 5.3**
Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = x^n, \;\; x \in [0, \frac{1}{2}]$$

Hemos visto que $\{f_n\}$ es convergente puntualmente en $[0, \frac{1}{2}]$ hacia cero.

Puesto que $\forall n \in \mathbb{N}$ la función f_n es positiva y creciente en $[0, \frac{1}{2}]$, tenemos:

$$sup\{|f_n(x) - 0| \; : \; x \in [0, \frac{1}{2}]\} = sup\{x^n : x \in [0, \frac{1}{2}]\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Esta sucesión tiende a cero cuando n tiende a infinito, lo cual implica que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia 0 en $[0, \frac{1}{2}]$, desde Proposición 7.1.1. ■

5.2 Series de Funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en $A \subset \mathbb{R}$, podemos considerar la sucesión $\{S_n\}$ definida por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \;\; \forall x \in A \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición 5.2.1 — Series de Funciones.
Decimos que $\{S_n\}$ es una **serie de funciones**, que se denota por $\sum_n f_n$

La sucesión $\{f_n\}$ es el **término general** de la serie $\sum_n f_n$ y la suma S_n es la n-ésima **suma parcial** de la serie $\sum_n f_n$ con sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$.

5.2.1 Convergencia

La serie de funciones $\sum_n f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando la sucesión de sumas parciales $\{S_n(x)\}$ converge. Esto es equivalente a decir que la serie de números reales $\sum_n f_n(x)$ sea convergente.

Definición 5.2.2 — Convergencia Puntual.
Sea $C \subset A$ no vacío, $f : C \to \mathbb{R}$. La serie $\sum_n f_n$ **converge puntualmente** en C, cuando la serie numérica $\sum_n f_n(x)$ converge, con límite puntual $f(x)$.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

con función suma de la serie:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

■ **Ejemplo 5.4**
Dado $\alpha > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por:

$$u_n(x) = \frac{x^\alpha}{1 + n^2 x^2}$$

Probar que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge puntualmente en $[0,\infty)$ para cualquier valor de α.

Si $x = 0$, la serie converge puntualmente con suma 0. Cuando $x > 0$, la convergencia se puede deducir usando la prueba de comparación de límites. $L = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (por ser armónica), entonces el cociente de las series:

$$\text{lím}_{n\to\infty} n^2 \frac{x^\alpha}{1+n^2x^2} = x^{\alpha-2}$$

Lo cual es un valor real, entonces ambas series convergen. Por lo tanto, la serie funcional converge puntualmente en $[0,\infty)$ por todo $\alpha > 0$. ■

Observación: De la teoría general de series numéricas convergentes se deduce que, si una serie de funciones es puntualmente convergente, entonces el término general ha de converger puntualmente hacia 0.

Definición 5.2.3 — Convergencia Uniforme.
La serie $\sum_n f_n$ **converge uniformemente** en $C \subset A$ cuando verifica que

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}: \ n \geq m \ \Rightarrow \ |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| < \varepsilon \ \forall x \in C$$

Es decir, la serie es uniformemente convergente cuando la sucesión de sumas parciales es uniformemente convergente.

Corolario 5.2.1
Una condición necesaria para que una serie de funciones $\sum f_n$ sea uniformemente convergente en un conjunto A es que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converja uniformemente a cero en A.

Definición 5.2.4 — Convergencia Absoluta.
Dada una serie de funciones $\sum_{n=!}^{\infty} f_n$ en un conjunto X, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es puntualmente convergente en X se dice que la serie original es **absolutamente convergente** (de forma puntual) en X.

Corolario 5.2.2
Toda serie absolutamente convergente es puntualmente convergente.

Definición 5.2.5 — Campo de Convergencia Absoluta.
El **campo de convergencia absoluta** de la serie $\sum_n f_n$ es el conjunto

$$D = \{x \in A : \sum_n |f_n(x)| \ \text{ es convergente}\}$$

Definición 5.2.6 — Convergencia Normal.
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones en un conjunto X. Se dice que la serie **converge normalmente** en X si existe una serie convergente de números reales no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$|f_n(x)| \leq m_n \ \ \forall x \in X$$

Teorema 5.2.1 — Criterio de Weierstrass.
Sea $\sum_n f_n$ una serie de funciones y A un conjunto tal que para todo $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, donde la serie $\sum_n \alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum_n f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.

■ **Ejemplo 5.5**
Probar que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ la serie de funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^n(x)}{n^{\frac{5}{2}}}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\dfrac{sen^n(x)}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta serie de números reales es armónica con $p > 1$, entonces es convergente. Por el criterio de Weierstrass, la serie funcional converge normalmente en $\mathbb{R}$, entonces converge uniformemente en $\mathbb{R}$. ■

■ **Ejemplo 5.6**
Estudiar la convergencia de la serie de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

y si es posible, hallar su suma.

La serie converge puntualmente para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto es obvio para $x = 0$ y tiene suma 0. Si $x \neq 0$, tenemos una serie geométrica con razón $\frac{1}{1+x^2}$, cuyo valor absoluto es menor que 1, por lo tanto es una serie convergente, con suma igual a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$$

La función suma es

$$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, el límite $n \to \infty$ de la serie funcional es una función discontinua, y podemos concluir que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$. ■

5.2.2 Series de Potencias

Definición 5.2.7 — Series de potencias.
Una serie de funciones con la siguiente forma se denomina una **serie de pontencias** centrada en $x = c$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n \tag{5.2}$$

donde a_n es una función de n y $c \in \mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 5.7**
Por ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n+4^n)x^n$$

con $a_n = 2^n + 4^n$ y $c = 0$. ■

5.2.3 Radio de convergencia

Definición 5.2.8 — Radio de convergencia.
El **radio de convergencia** R de una serie de potencias es el radio del conjunto de valores de $x \subset \mathbb{R}$ para que la serie es convergente, donde:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \tag{5.3}$$

e identificamos los tres casos:

i) Si la serie converge únicamente en el punto x_0, entonces $R = 0$,

ii) Si la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $R = \infty$,

iii) En otro caso, su radio de convergencia define el superior del conjunto de valores reales positivos r tales que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

También, tenemos la siguiente prueba:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \begin{cases} \infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \infty \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 < \lambda < \infty \end{cases} \tag{5.4}$$

■ **Ejemplo 5.8**
Hallar el radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 4^n) x^n$$

Tenemos $a_n = 2^n + 4^n$, entonces con $a_{n+1} = 2^{n+1} + 4^{n+1}$ calculamos el radio de convergencia

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2^{n+1}+4^{n+1}}{2^n+4^n}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1+2^n)}{2^{n+1}(1+2^{n+1})}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{2^{n+1}} + 2}$$

$$R = \frac{1}{4}.$$

El radio de convergencia de la serie es $\frac{1}{4}$. ■

Observación: El radio de convergencia de una serie de potencias depende únicamente de sus coeficientes $\{a_n : n \geq 0\}$. Es decir, las siguientes series tienen el mismo radio de convergencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

5.2.4 Intervalo de convergencia

El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ para que la serie es convergente. El intervalo de convergencia viene dada por

$$|x-c| < R \tag{5.5}$$

donde la serie diverge cuando $|x-c| > R$, y puede converger o divergir si $|x-c| = R$.

■ **Ejemplo 5.9**

Siguiendo con el ejemplo anterior $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+4^n)x^n$. El radio de convergencia es $R = \frac{1}{4}$, entonces el intervalo de convergencia es $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Es decir, la serie converge $\forall x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, o $|x-a| < \frac{1}{4}$. ■

Los extremos del intervalo de convergencia de una serie de potencias no están incluidos. Para saber si la serie converge para estos valores de x, hay que estudiarlos por separados.

■ **Ejemplo 5.10**

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

El radio de convergencia es $R = 1$, entonces la serie converge $\forall x \in (-1, 1)$.

En el punto $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$. La serie es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ no converge en $x = 1$.

En el punto $x = -1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. La serie es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ no converge en $x = -1$.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. ■

■ **Ejemplo 5.11**

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Si $a_n = \frac{1}{n}$, el radio de convergencia es $R = 1$. La serie converge $\forall x \in (-1, 1)$.

En el punto $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Esto es una serie armónica con $p = 1$, entonces es divergente.

En el punto $x = -1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Si usamos el teorema de Sandwich para la sucesión $\frac{(-1)^n}{n}$, definimos $b_n = \frac{-2}{n}$ ■

■ **Ejemplo 5.12**

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$$

■

Definición 5.2.9 — Función Analítica.
Sean I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y f una función real definida en I. Se dice que f es **analítica** en un punto $x_0 \in I$ si existen un número $\delta > 0$ tale que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, y una serie de potencias

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ convergente en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, tales que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad \text{para que } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

es decir, que la serie de potencias converge en x_0 y que coincide con la función f en dicho punto.

5.2.5 Series de Taylor

Definición 5.2.10 — Serie de Taylor.
Sea una función f de clase C^∞ en un entorno del punto x_0. La serie de potencias:

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se denomina **serie de Taylor** de f centrado en el punto x_0.

Definición 5.2.11 — Polinomio de Taylor.

$$T_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{5.6}$$

Surge la pregunta: ¿es toda función C^∞ en un entorno de x_0 analítica en dicho punto?. Dicho de otra forma: ¿viene representada una función por su serie de Taylor en el punto x_0?

En general, no.

■ **Ejemplo 5.13**
Consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Resulta que la función es de clase C^∞, y además

$$f^{n)}(0) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces la serie de Taylor es nula, y no es igual a $f(0)$ en ningún entorno de 0. ■

Definición 5.2.12 — Resto de Taylor.
Sea una función f de clase C^∞ en un entorno del punto x_0. El **resto de Taylor** de orden n de f en x_0 se define como:

$$R_n(f,x_0)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

■ **Ejemplo 5.14**
■

5.2.6 Desarrollos en serie de Taylor de las funciones elementales

Todos centrados en $x_0 = 0$.

a.) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ \ x \in \mathbb{R}$, b.) $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R},$

c.) $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R},$

d.) $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad x \in (-1,1)$

5.2.7 Series de Maclaurin

5.3 Problemas

1.
2. Halla el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias

a.)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)x^n$$

b.)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{2n+1}}{2^{n^2+1}}$$

c.)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}x^n$$

d.)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n^2}$$

e.)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{4n}$$

f.)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-c)^n}{nc^n} \qquad c\in\mathbb{R}$$

VI

Apéndice 1 - Conjuntos Numéricos

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1subsection.1.1.2subsec

chapter.7section.7.1section.7.2section.7.3section.7.4subsection.7

6. Conjuntos Numéricos

6.1 Introducción

6.1.1 Definición

Definición 6.1.1 — Conjunto.
Un **conjunto** es una colección, bien definida, de elementos.

Bien definida quiere decir que existe una regla de afiliación inequívoca.

■ **Ejemplo 6.1**

- El conjunto de gente alta **no** es un conjunto
- El conjunto de gente más alta que 1.5m **sí** es un conjunto

■

Los elementos que forman un conjunto pueden ser números, letras, o bien nombres.

6.1.2 Notación

Un conjunto está escrito usando las llaves '$\{\}$', separando cada elemento del conjunto con un comma. El nombre de un conjunto suele ser expresado con una letra mayúscula, y los elementos que forman el conjunto con letras minúsculas.

■ **Ejemplo 6.2**
$A = \{1,4,7,9\}$
Donde el conjunto A tiene elementos $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 9$.
$B = \{x,y,z\}$
$C = \{Victor, Leticia, Juan, Cristina\}$
■

Para la definición correcta de un conjunto y sus elementos, formalizamos su notación:

Definición 6.1.2 — Notación.

Definimos que un elemento a **pertenece** a un conjunto A como:

$$a \in A$$

O en el caso contrario:

$$a \notin A$$

Se puede definir un conjunto con intervalos de números, o bien con preposiciones.

■ **Ejemplo 6.3**

$$A = \{x : x \text{ es una vocal}\}$$
$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq 4\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

donde ':' se lee como "*tal que*". ■

6.2 Conjuntos Notables

Los conjuntos numéricos más notables son:

- Conjunto Vacío $\emptyset$ (también $\{\}$), $\emptyset = \{x : x \neq x\}$
- Números Naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
- Números Enteros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Números Racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} :\ p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$
- Números Reales $\mathbb{R}$
- Números Complejos $\mathbb{C} = \{x + iy\ : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$
- Conjunto Universal

Cada uno de estos conjuntos notables tiene propiedades importantes que están usados exhaustivamente en matemáticas para desarrollar demostraciones y razonar argumentos. Usaremos algunos de ellos durante este curso, donde enfocamos en los números reales $\mathbb{R}$.

6.3 Representación Gráfica

Definición 6.3.1 — Diagrama de Venn.
Un **diagrama de Venn** es una gráfica para visualizar conjuntos y las interacciones entre ellos.

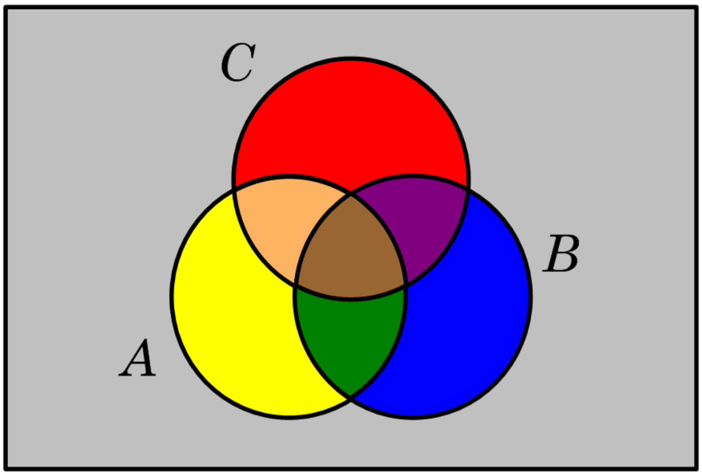


Figura 6.1: Diagrama de Venn (Fuente: *Wikipedia*)

■ **Ejemplo 6.4**
Si consideremos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4,5\}$, su diagrama de Venn sería:
■

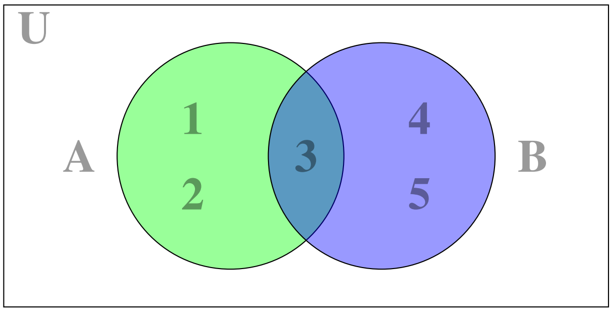


Figura 6.2: Ejemplo de diagrama de Venn

donde el elemento compartido, 3, aparece en la intersección de los dos conjuntos.

6.4 Operaciones

La interacción entre varios conjuntos está definida con **operaciones**.

6.4.1 Intersección

Definición 6.4.1 — Intersección.
La **intersección** entre dos conjuntos son los elementos que aparecen en ambos conjuntos, y su notación es $\cap$.

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

6.4.2 Unión

Definición 6.4.2 — Unión.
La **unión** entre dos conjuntos son todos los elementos que aparecen en los conjuntos, y su notación es $\cup$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

6.4.3 Diferencia

Definición 6.4.3 — Diferencia.
La **diferencia** entre dos conjuntos son los elementos de un conjunto restando los elementos del otro conjunto.

$$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

6.4.4 Complementario

Definición 6.4.4 — Complementario.
El **complementario** de un conjunto son todos los elementos que no aparecen en dicho conjunto, y su notación es $\bar{A}$ o bien A'.

$$A' = \{x : x \notin A\}$$

El complementario de un conjunto A también se puede calcular restando A del conjunto universal $A' = U - A$.

6.5 Propiedades

- Propiedad de Idempotencia $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- Propiedad Conmutativa $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- Propiedad Asociativa $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Propiedad Absorción $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$
- Propiedad Distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Ley de Involución $(A')' = A$
- Leyes de De Morgan $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- Leyes de Identidad $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Leyes de Complementarios $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \emptyset, \emptyset' = U$, $U' = \emptyset$

6.6 Subconjuntos

Definición 6.6.1 — Subconjunto.
Sean A y B dos conjuntos.

Decimos que A es un **subconjunto** de B, escrito como $A \subseteq B$, si todos los elementos de A pertenecen a B. El diagrama de Venn sería:

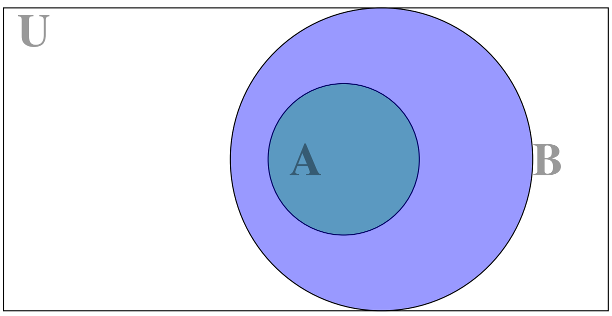


Figura 6.3: Subconjuntos - Ejemplo

Los conjuntos numéricos notables comparten elementos, y pueden ser definidos como subconjuntos entre ellos, según el siguiente diagrama de Venn.

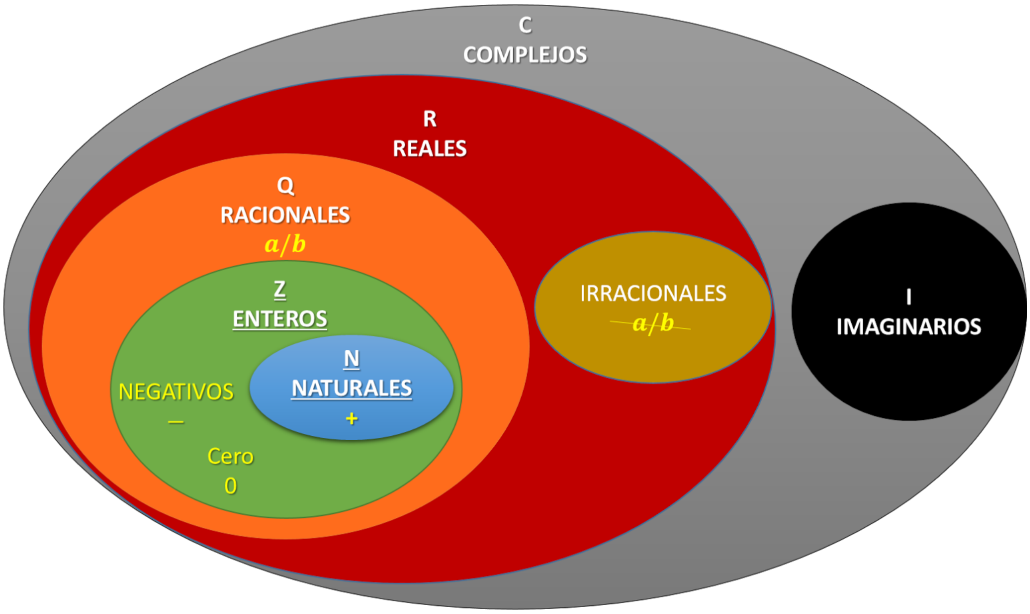


Figura 6.4: Subconjuntos Notables

6.7 Cardinal

Definición 6.7.1 — Cardinal.
El **cardinal** de un conjunto A, escrito $|A|$, es el número de distintos elementos en A.

■ **Ejemplo 6.5**
Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$:

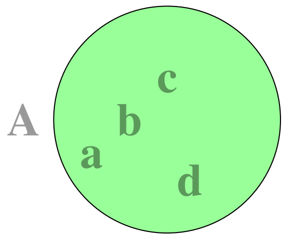


Figura 6.5: Cardinal de un conjunto - Ejemplo

$|A| = 4$ ■

6.8 Conjunto Potencia

Definición 6.8.1 — Conjunto Potencia.
El **conjunto potencia** de un conjunto A, escrito $\mathscr{P}A$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Es decir:

$$\mathscr{P}A = \{B : B \subseteq A\}$$

■ **Ejemplo 6.6**
Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3\}$,
El conjunto de potencia de A es:

$$\mathscr{P}A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

donde,

$$|\mathscr{P}A| = 2^{|A|}$$

■

6.9 Producto Cartesiano

Definición 6.9.1 — Producto Cartesiano.
Sean A y B conjuntos. Al conjunto formado por todos los pares ordenados de primera componente en A y segunda componente en B, se le denota $A \times B$ y se le llama **producto cartesiano** de A y B .

Definimos

$$A \times B = \{(x,y) :\ x \in A, y \in B\}$$

■ **Ejemplo 6.7**
Dado los conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$, el producto cartesiano de A y B es:

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

■

6.9.1 Propiedades

Conjunto vacío

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

Conmutativo

$$A \times B \neq B \times A$$

Asociativa

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

Cardinal

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

6.10 Problemas

1. Dado los siguientes conjuntos:
   $A = \{0,2,4,6,8\}$
   $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
   $C = \{x : x \text{ es dígito mayor que } 3\}$
   Indicar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes afirmaciones:

   a) $7 \in B$
   b) $3 \notin C$
   c) $8 \in A$
   d) $5 \notin B$
   e) $0 \in A$
   f) $9 \notin C$
   g) $11 \notin A$
   h) $8 \in B$

2. Representar, en el mismo diagrama de Venn, los siguientes conjuntos:
   $U = \{x : x \text{ es un dígito}\}$
   $A = \{0,2,4,6,8\}$
   $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
   $C = \{x : x \text{ es dígito mayor que } 3\}$
3. En base a los conjuntos dados colocar $\subseteq$ o $\not\subset$ según corresponda:
   $U = \{x : x \text{ es número natural}\}$
   $A = \{x : x \text{ es número natural impar}\}$
   $B = \{x : x \text{ es número múltiplo de } 2\}$
   $C = \{x : x = 4 \cdot n \text{ con } n \text{ número natural}\}$

   a) $A.....U$
   b) $A.....B$
   c) $C.....B$
   d) $B.....A$
   e) $B.....C$
   f) $C.....A$
   g) $A.....C$
   h) $B.....U$

4. Dados $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,2\}$, decir si es verdadero o falso:

   a) $\{a,b\} \subseteq A$
   b) $\{a\} \in A$
   c) $1 \in B$
   d) $\{1,2\} \in B$
5. Sean $U = \{x : x \in N_0, 0 \leq x \leq 9\}, A = \{1,2,3,4\}, B = \{x : x \in N_0, 5 \leq x \leq 8\}, D = \{3,4\}, C = \{3,4,5,6\}$. Calcular por extensión y hacer el diagrama de Venn correspondiente

   a) $A \cup B$
   b) $D \cap B$
   c) $A - B$
   d) $C \cup D$
   e) $A \cap C$
   f) $\bar{A}$
   g) $D - C$
   h) $\overline{A \cap B}$

6. Completar las siguientes propiedades

   a) $A \cup U =$
   b) $A \cup \phi =$
   c) $A \cap U =$
   d) $A \cap U =$
   e) $\bar{\phi} =$
   f) $\bar{U} =$
   g) $\bar{\bar{A}} =$

7. Sea X un conjunto. Dar $\mathscr{P}X$, especificando todos sus elementos, en cada uno de los casos siguientes:

a) $X = \{1,2\}$
b) $X = \{a,b,c\}$
c) $X = \{1,2,3,4\}$

8. Un grupo de 50 estudiantes de Ciencias ha sido encuestado a fin de saber si han estudiado francés o alemán, obteniendo los siguientes datos: 25 han estudiado francés, 20 alemán y 5 ambos. Encuentre el número de estudiantes que:
   a) Sólo han estudiado francés.
   b) No han estudiado alemán.
   c) Han estudiado francés o alemán.
   d) No han estudiado ninguno de los dos idiomas.
9. Simplificar la operación:

$$\overline{A \cup B \cup C}$$

10. Comprueba la siguiente equivalencia:

$$(A \cap C) - B = A \cap C \cap \overline{B}$$

11. Comprueba la siguiente equivalencia:

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

12. Tom afirma que: $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

    ¿Es cierto lo que afirma Tom?

VII

Apéndice 2 - Funciones Elementales

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1subsection.1.1.2subsec

7. Funciones Elementales

Definición 7.0.1
Dados dos conjuntos A y B, se define una función $f: A \to B$ como una relación que asigna a todo elemento x de A, un único elemento Y de B, mediante un criterio $f(x)$.

Definición 7.0.2
Considere una función $f: A \to B$. Al conjunto A se le llama *dominio* y al B se le llama *codominio*.
A los elementos del dominio se le les llama *preimágenes*, y si un elemento del codominio esta relacionado con un preimagen, se le llama imagen.

■ **Ejemplo 7.1**
Dados dos conjuntos A y B, buscamos su dominio, codominio, preimagen e imagen.

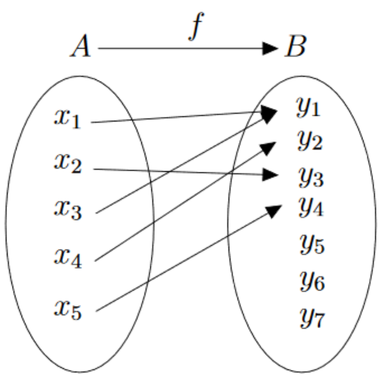


Figura 7.1: Ejemplo de una función

- Dominio: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
- Codominio: $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$
- Preimagen/imagen: e.g. $f(x_1) = y_1$

x_1 es el preimagen del imagen y_1.

■

Definición 7.0.3
Dada una función $f : A \to B$, se define el **ámbito** de f al conjunto de imágenes.

$$Amb(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

Definición 7.0.4
Una función $f : A \to B$ es inyectiva si todo elemento del ámbito tiene una única preimagen

Definición 7.0.5
Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si su codominio y ámbito son iguales. Es decir $Amb(f) = B$

Definición 7.0.6
Una función $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

■ **Ejemplo 7.2**
Dada la función $f : A \to B$, determine si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

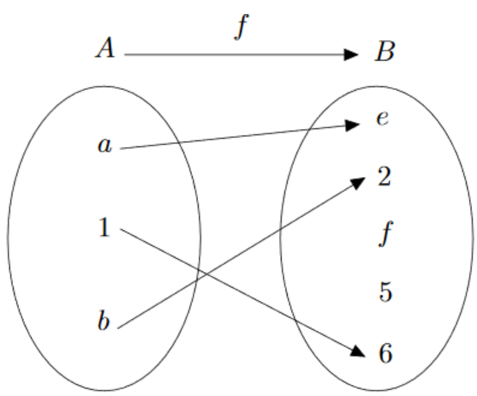


Figura 7.2: Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Desde la gráfica, identificamos que la función es inyectiva, porque cada elemento del ámbito tiene una única preimagen. La función no es sobreyectiva, porque el codominio incluye elementos que no aparecen en el ámbito. ■

7.1 Monotonía

Definición 7.1.1
Sea una función $f : A \to B$. Se dice que
- f es estrictamente creciente en A si cumple $f(x_i) < f(x_{i+1})$ $\forall i$.
- f es estrictamente decreciente en A si cumple $f(x_i) > f(x_{i+1})$ $\forall i$.
- f es constante en A si cumple $f(x_i) = f(x_{i+1})$ $\forall i, x_i \neq x_{i+1}$.

■ **Ejemplo 7.3**
Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 8x - x^2$, determinamos los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función.

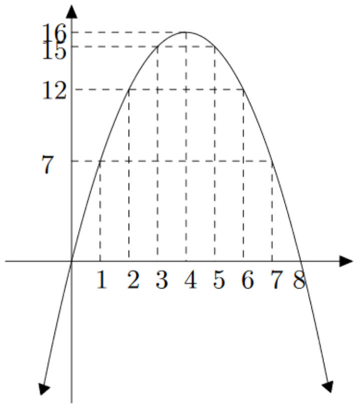


Figura 7.3: Ejemplo del crecimiento de una función

Considerando la gráfica, podemos ver que la función f es creciente en el intervalo $(-\infty, 4]$ y decreciente en el intervalo $[4, +\infty)$. ■

7.2 Operaciones

Definición 7.2.1
Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones, A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se define:

- $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} : A \cap B - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ tal que $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

■ **Ejemplo 7.4**
Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{3x+5}{2-x} \qquad g(x) = 2 + x^2$$

Demostramos las operaciones restar y dividir:

$$(f-g)(3) = f(3) - g(3) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)}$$

$$(f-g)(3) = \frac{3(3)+5}{2-3} - 2 - 3^2 \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{\frac{3(-1)+5}{2+1}}{2+(-1)^2}$$

$$(f-g)(3) = -25 \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{2}{9}$$

■

Definición 7.2.2
Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones, se define la *composición* de f con g como:

$$g \circ f : A \to C \text{ tal que } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

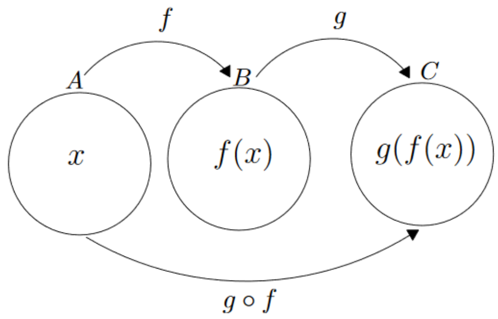


Figura 7.4: Composición de una función

■ **Ejemplo 7.5**
Dadas las funciones:

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad f(x) = \frac{1}{x-2}$$

La composición de la función g de f es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x-2}}{\left(\frac{1}{x-2}\right)^2 - 4}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1-4(x-2)^2}{(x-2)^2}}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x-2}{-4x^2 + 16x - 15}$$

■

7.3 Función Inversa

Definición 7.3.1 — Función Inversa.
Dada una función $f : A \to B$, se define la función inversa de f como $f^{-1} : B \to A$

■ **Ejemplo 7.6**
Dada la función

$$y = x^2 + 1$$

Despejamos por x:

$$x^2 = y - 1$$

$$x = \sqrt{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

La función f y su inversa f^{-1} se representan gráficamente como:

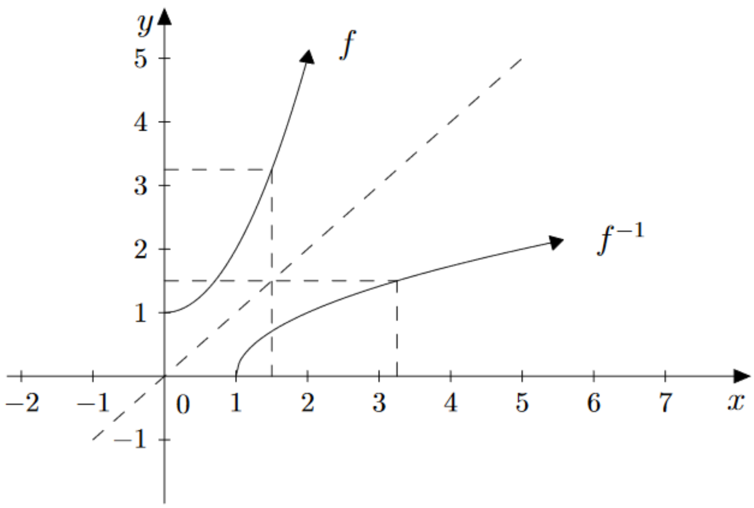


Figura 7.5: Inversa de una función

■

Para comprobar que una función es la inversa de otra, verificamos con:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Nota:
Es importante tener en cuenta que la función inversa tiene exponente $'-1'$, pero es solo un símbolo, no un exponente en si. Es decir,

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

7.4 Funciones elementales

7.4.1 Básicas

Definición 7.4.1 — Función Lineal.
Dada una función real de una variable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función f se define como lineal si tiene la forma:

$$f(x) = mx + b$$

donde $m, b \in \mathbb{R}$.

El coeficiente m nos da la pendiente de la recta, mientras el coeficiente b nos proporcione la intersección de la recta con el eje y.

■ **Ejemplo 7.7**
Consideramos la función

$$f(x) = 2x + 1$$

La representación gráfica de f es:

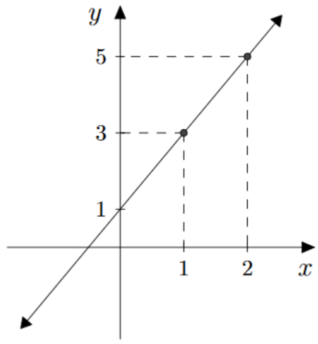


Figura 7.6: Función Lineal

■

En el caso no tener la ecuación de la recta, sino las coordenadas de algunos puntos, es posible calcular el coeficiente m.
Dados dos puntos distintos de la recta, el pendiente m se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

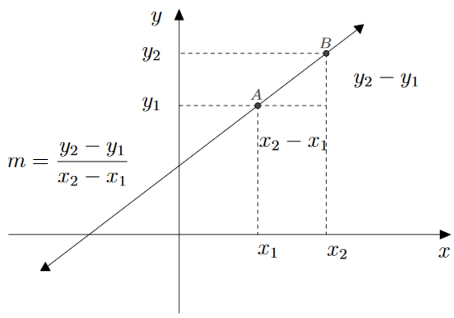


Figura 7.7: Pendiente de una recta

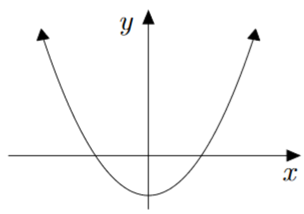
Definición 7.4.2 — Función Cuadrática.
Dada una función real de una variable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función f se define como lineal si tiene la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

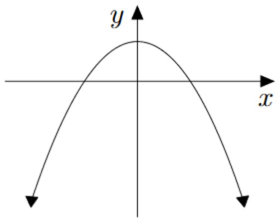
donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Concavidad

– Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba (convexa)



– Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo (cóncava)



Intersecciones

7.4.2 Exponencial y logarítmica

$$ln(e^x) = x \tag{7.1}$$

$$ln(x^a) = aln(x) \tag{7.2}$$

$a \in \mathbb{R}$.

$$ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y) \tag{7.3}$$

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y) \tag{7.4}$$

7.4.3 Trigonométricas

$$sen(x) \tag{7.5}$$

$$cos(x) \tag{7.6}$$

$$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \tag{7.7}$$

$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \tag{7.8}$$

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \tag{7.9}$$

$$cot(x) = \frac{1}{tan(x)} \tag{7.10}$$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sen(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$tan(x)$	0	1	0	-1	0	1	ind	-1	0
$csc(x)$	ind	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	ind	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	ind
$sec(x)$	1	$\sqrt{2}$	ind	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	ind	$\sqrt{2}$	1
$cot(x)$	ind	1	0	-1	ind	1	0	-1	ind

Fórmulas Útiles

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \qquad \cos(-x) = \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$
$$\tan x\tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\tan x\cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-x) = \tan x$$
$$\sec(\frac{\pi}{2}-x) = \csc x$$
$$\csc(\frac{\pi}{2}-x) = \sec x$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

7.4.4 Hiperbólicas

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{7.11}$$

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{7.12}$$

$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)} \tag{7.13}$$