Transporte y Logística

Grado en Matemática Aplicada

PhD. Thomas Ian Ashley
Departamento de Métodos Cuantitativos

Universidad LOYOLA

Índice general

Tema 1 - Fundamentos de la programación lineal

part.1

1. Fundamentos de la Optimización Matemática

1.1 Introducción

Problemas lineales son de la forma

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \end{array}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

La forma anterior de escribir un problema lineal se llama la forma **canónica**.

Para la resolución de estos problema, es habitual transformar el sistema a su forma **estándar**:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \end{array}$$

donde $b \geq 0, x \geq 0$.
La transformación entre las dos formas de los problemas lineales está conseguido con la inclusión de **variables de holgura**.

Si tenemos una restricción de $\leq$, sumamos una variable de holgura **positiva**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \;\; \rightarrow \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_j = b_j \;\; \forall i, s_j \geq 0$$

Si tenemos una restricción de $\geq$, restamos una variable de holgura **positiva**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \;\; \rightarrow \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - e_j = b_j \;\; \forall i, e_j \geq 0$$

Una variable irrestricta x puede ser reemplazada por dos variables no negativas $x_1, x_2 \geq 0$, escribiendo $x = x_1 - x_2$. eliminando x del problema.

Si una variable tiene cota inferior distinta a cero e.g. $x \geq 5$, la podemos reemplazar por otra variable $x' = x - 5$, con restricción $x' \geq 0$.

Cotas superiores pueden estar incorporadas como restricciones nuevas.

■ Ejemplo 1.1
Consideremos el problema lineal en forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad z &= -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 &\leq -4 \\ x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Para convertir este problema a la forma estándar:

– Cambiar a minimizar, multiplicando por -1

$$\text{minimizar} \quad \hat{z} = 5x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

– La tercera restricción de desigualdad multiplicada por -1 para tener $b \geq 0$

$$4x_1 + 9x_2 - 4x_3 \geq 4$$

– La variable x_1 tiene cota inferior distinta a 0

$$x_1' = x_1 + 2$$

– La cota superior de x_2 se puede incorporar como una restricción nueva
– La variable x_3 no está acotada (irrestrictiva), entonces transformamos

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

Así quedamos con:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad \hat{z} &= 5x_1' + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3'' - 10 \\ \text{s.a} \quad 2x_1' + 4x_2 + 6x_3' - 6x_3'' &= 11 \\ 3x_1' - 5x_2 + 3x_3' - 3x_3'' &\leq 11 \\ 4x_1' + 9x_2 - 4x_3' + 4x_3'' &\geq 12 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'' &\geq 0 \end{aligned}$$

– Quitamos el constante del objetivo con el cambio $z' = \hat{z} + 10$

$$z' = 5x_1' + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3''$$

El último paso es de sumar y restar variables de holgura

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad z' &= 5x_1' + 3x_2 - 7x_3' + 7x_3'' \\
\text{s.a} \quad 2x_1' + 4x_2 + 6x_3' - 6x_3'' &= 11 \\
3x_1' - 5x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + s_2 &= 11 \\
4x_1' + 9x_2 - 4x_3' + 4x_3'' - e_3 &= 12 \\
x_2 + s_4 &= 4 \\
x_1', x_2, x_3', x_3'', s_2, e_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lo cual se puede resumir en la forma matricial:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad z &= c^T x \\
\text{s.a} \quad Ax &= b \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

La solución a este problema en forma estándar es $z' = -0.12857, x_1' = 0, x_2 = 1.65714, x_3' = 0.728571, x_3'' = 0, s_2 = 17.1, e_3 = 0, s_4 = 2.34286$.

Dando como solución al problema original $z = 10.12857, x_1 = -2, x_2 = 1.65714, x_3 = 0.728571$. ■

Entonces, ¿por qué hemos convertido el problema a la forma estándar? Una de las razones, por que hemos convertido las desigualdades a igualdades, es lo siguiente. Si tenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Podemos reducir este sistema al sistema equivalente

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

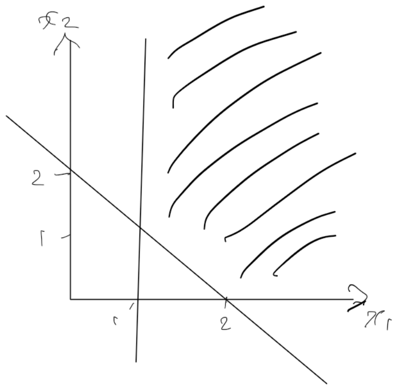
restando la primera restricción de la segunda. Sin embargo, si hacemos la misma operación con las desigualdades

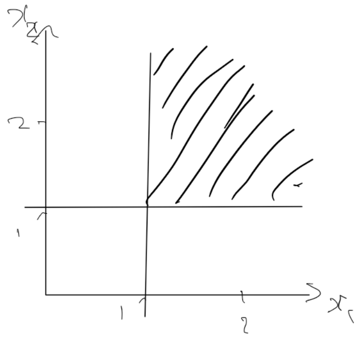
$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 &\geq 2
\end{aligned}
$$

acabamos con

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 1 \\
x_2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

lo cual es un sistema de restricciones que define una región factible distinto. Vemos la diferencia en la siguiente gráfica





Eliminación en sistemas de desigualdades puede afectar las soluciones. Importante porque muchos métodos realizan operaciones en sistemas de restricciones para resolver el problema lineal.

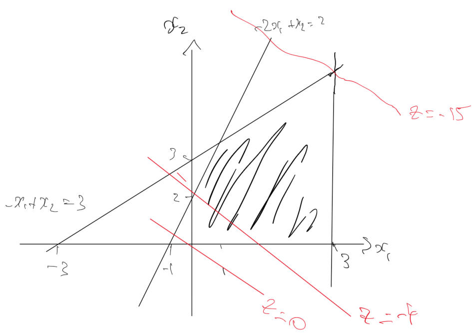
1.1.1 Resolución gráfica

Para introducir los conceptos necesarios para la resolución general de un problema lineal, consideremos la resolución gráfica de problemas dos dimensionales.

■ Ejemplo 1.2
Consideremos el problema

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

La región factible es:



Dibujando las lineas del valor de la función objetivo, vemos que el mínimo ocurre en $x = (3,6)^T$. ■

Observación: Que el óptimo ocurre en una esquina no es coincidencia, como estudiaremos más adelante.

1.2 Conjuntos Poliédricos

En esta sección, definimos poliedros y sus propiedades básicas. Los poliedros nos dejan resumir un conjunto de restricciones en un problema de programación matemática, y más adelante veremos como aplicar estos conceptos a resolver un problema de optimización.

Definición 1.2.1
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que es un **poliedro** si es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, es decir:

$$S = \{x : \ p_i^T x \leq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m\} \qquad p_i \in \mathbb{R}^n, p_i \neq 0, \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.2.1
Un poliedro es un conjunto convexo.

Demostración 1.1
Basta ver que un poliedro describe un sistema de desigualdades lineales de la forma

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

con $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$

Este sistema se puede escribir en la forma $Ax \leq b$, y podemos definir el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es la intersección de m semiespacios de la forma

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i x \leq b_i\}$$

Por ser convexos cada $A_i x \leq b_i$ (un semiespacio es convexo), el conjunto S es también convexo por ser intersección de convexos. Entonces, un poliedro es un conjunto convexo.
■

Proposition 1.2.2
$\mathscr{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro.

Demostración 1.2
Claramente, el conjunto $\mathscr{P}'$ queda representado por el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de dimensión n.

Llamando $A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}, b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$, se obtiene un sistema de la forma $\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A'x \leq b'\}$, que es igual a $\mathscr{P}'$. Luego, $\mathscr{P}'$ es un poliedro por definición. ■

Proposition 1.2.3
Un poliedro es un conjunto cerrado.

Demostración 1.3
Sea $\mathscr{P}$ el poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ y consideremos $\bar{x} \in \bar{\mathscr{P}}$ ($\bar{\mathscr{P}}$ clausura de $\mathscr{P}$. La clausura de un conjunto E es el conjunto $\bar{E}$ de todos los puntos de acumulación de E. Es el

concepto del límite, que los puntos se pueden ser 'aproximados' por puntos en E. Un conjunto es cerrado si y sólo si es igual a su clausura).

Mostraremos que $\bar{x} \in \mathscr{P}$.

Como $\bar{x} \in \bar{\mathscr{P}}$, existe una sucesión $\{x_k\}$ en $\mathscr{P}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$ (punto de acumulación).

Además, $\forall k \geq 0$, el punto x_k verifica

$$\begin{aligned} Ax_k &= b \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomando límite (y por continuidad de la función lineal $x \to Ax$) se tiene

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

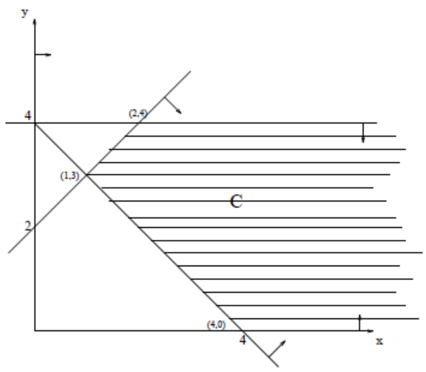
Luego $\bar{x} \in \mathscr{P}$ y por lo tanto $\bar{\mathscr{P}} \subseteq \mathscr{P}$. Dado que se cumple siempre $\mathscr{P} \subseteq \bar{\mathscr{P}}$, se obtiene $\bar{\mathscr{P}} = \mathscr{P}$, luego $\mathscr{P}$ es cerrado. ■

■ Ejemplo 1.3
El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \geq 4, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Vemos que este conjunto es un poliedro convexo y cerrado, pero no acotado, como podemos visualizar en la siguiente gráfica:



■

1.2.1 Conjuntos Factibles

Consideremos a partir de ahora los poliedros de la forma $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in M^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Podemos analizar la estructura del sistema de ecuaciones lineales para determinar si existen soluciones factibles o no.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, por el teorema de *Rouché-Frobenius*:

1. Si $rango(A|b) \neq rango(A)$, entonces el sistema es **incompatible** (no tiene solución) y por tanto $S = \emptyset$.
2. Si $rango(A|b) = rango(A) = n$, entonces el sistema es **compatible determinado** (existe una única solución), S como mucho está formado por un único punto.
3. Si $rango(A|b) = rango(A) < m \leq n$, existen restricciones redundantes, se eliminan.

Nota $rango(A) = rango(A^T)$. Donde el rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes.

■ **Ejemplo 1.4**

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de la matriz A, aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F_3 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos los elementos por debajo del diagonal principal son ceros, y la último fila está vacía, por lo tanto $rango(A) = 2$.

También podemos llegar a la solución mirando los determinantes de la matriz: el rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula (determinante no nulo).

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la submatriz de orden 2 es el mayor con determinante no nulo, dando $rango(A) = 2$. ■

■ **Ejemplo 1.5**

Consideremos la solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Escribiendo como $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada $A|b$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & | & -2 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 8 \\ 2 & -2 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Calculando el rango de la matrix de coeficientes y la matriz ampliada: $rango(A) = 3, rango(A|b) = 3$ y $n = 3$. Por lo tanto, es un sistema compatible determinado, y existe una única solución ($x = (1, -2, 3)$). ■

Aquí necesito una explicación de m<m etc, si hay soluciones o no. Página 106 del libro azul

1.3 Puntos Extremos

Definición 1.3.1
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío, convexo. Un punto $x \in S$ es un **punto extremo** de S si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0,1)$ entonces $x = x_1 = x_2$. Es decir, x no puede expresarse como combinación convexa estricta de otros puntos de S.

Nota: Un conjunto convexo puede no tener puntos extremos (bola abierta en $\mathbb{R}^n$), tenerlos en número finito (Figura 1.1) o tener infinitos puntos extremos (bola cerrada en $\mathbb{R}^n$).

■ Ejemplo 1.6
Podemos expresar el punto $E =< 2.5, 1 >$ en 1.1 por los puntos $A =< 1, 1 >$ y $C =< 4, 1 >$, con $E = 0.5A + (1 - 0.5)C$. El punto C no se puede expresar de la misma forma, y por lo tanto es un punto extremo de la región.

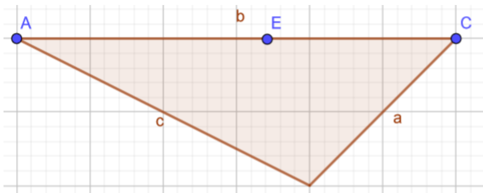


Figura 1.1: Punto Extremo

■

■ Ejemplo 1.7
Veamos tres casos de convexos y sus puntos extremos:

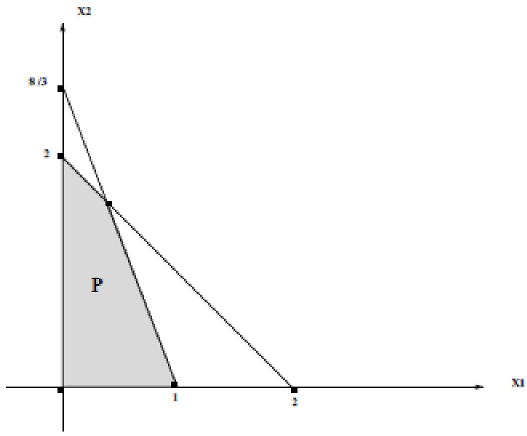
a. Sea $S = B(0,1)$, la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos extremos queda representado por $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$, que es la frontera de S.
b. El conjunto de puntos extremos del poliedro del ejemplo 1.1 es:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c. El conjunto de puntos extremos de un semiespacio cerrado es vacío.

■

■ Ejemplo 1.8
Consideremos la región definida por $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 + x_2 \leq 2, 8x_1 + 3x_2 \leq 8, \ x_1, x_2 \geq 0\}$



Los puntos extremos son $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{8}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$. (visualmente seleccionados)

Convertimos el problema al poliedro en $\mathbb{R}^4$: $P' = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3 = 2, 8x_1+3x_2+x_4 = 8,\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0\}$ que es equivalente a P en el sentido siguiente:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in P \iff \exists\, x_3,x_4 \geq 0 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in P'$$

lo cual representa un cambio a la forma estándar.

Entonces examinamos el sistema, haciendo la intersección de cada dos ecuaciones, igualando las otras a cero.

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 2\\ 8x_1+3x_2+x_4 &= 8\\ x_1,x_2,x_3,x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Asignando valor nulo a dos variables cualesquiera podemos resolver el sistema de dos ecuaciones que resulta, cada vez. Dando soluciones:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\2\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{8}{3}\\\frac{-2}{3}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{8}{5}\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Se observa que dos de estas soluciones no satisfacen la condición de positividad (no pertenecen a P') y las cuatro restantes determinan en sus primeras coordenadas los extremos de P: $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{8}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Esta relación se expresa en el siguiente teorema de caraterización de puntos extremos. ■

Teorema 1.3.1 — de caracterización de puntos extremos.
Sea $P = \{x : \ Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathscr{M}^{m\times n}, rango(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Un punto x es **punto extremo** de P sí y solo sí A puede ser descompuesta, reordenando sus columnas en la forma

$A = [B,N]$, tal que:

$$x = \left[\begin{smallmatrix} x_B \\ x_N \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$$

con $B \in \mathscr{M}^{m\times m}$ (matriz básica), invertible, $N \in \mathscr{M}^{m\times(n-m)}$ (matriz no básica), y tal que $B^{-1}b \geq 0$.

$$Ax = b \iff [B|N]\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \iff Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow Bx_B = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b$$

Es decir, un punto x es punto extremo sii es una solución básica factible.

A $x \in \mathbb{R}^m$ se le llama **solución básica**. $x_B \in \mathbb{R}^m$ con coeficientes de $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertible (**variables básicas**) y $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ iguales a cero (**variables no-básicas**). El conjunto de variables básicas se llama la **base**.

Si $x_B \geq 0$ es una **solución básica factible**. Si además es óptimo, entonces se le llama **solución básica factible óptima.** Si alguna variable básica es cero, se llama **solución básica factible degenerada**.
En las definiciones anterior, el uso de la palabra 'solución' se refiere al sistema de restricciones, no a la función objetivo.

Como demostraremos más tarde, si un programa linea tiene óptimo, entonces tiene una solución básica factible óptima. Por lo tanto, es suficiente solo examinar solución básicas factible para resolver un problema lineal.

Demostración 1.4
$\Longleftarrow$

Sea $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$. Se tiene que $x \in P$, pues

$$Ax = [B,N]\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

Confirmamos que esto es un punto extremo. Sean $u, v \in P$ tales que $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, para algún $\lambda \in (0,1)$, es decir:

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

De allí:

$$\begin{aligned} &(1) \;\; \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1 = B^{-1}b \\ &(2) \;\; \lambda u_2 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{aligned}$$

Como $u, v \in P$, tenemos $u, v \geq 0$. Luego de (2) se tiene que $u_2 = v_2 = 0$.

Como $u \in P$, satisface $Au = b$, esto es $[B,N]\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Bu_1 = b$ entonces $u_1 = B^{-1}b$, por lo tanto, $u = x$.

De a misma manera se prueba que $v = x$, con lo que concluye que x es punto extremo.

($\Longrightarrow$) Supongamos ahora que $x \in P$ es un punto extremo con $k \leq m$ primeras componentes positivas y el resto cero. Reordenando las columnas del sistema, x puede escribirse como:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $x_i > 0$ para $i = 1, \ldots, k, k \leq m$.

Notemos por A^k la k-ésima columna de A. Luego $A = [A^1, \ldots, A^n]$ y

$$Ax = b \iff \sum_{i=1}^{k} x_i A^i = b$$

Probaremos que $A^1, \ldots, A^k$ son linealmente independientes. Supongamos que son linealmente dependientes (e intentamos demostrar contradicción), es decir que existen $\mu_1, \ldots, \mu_k$ no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{k} \mu_i A^i = 0$.
Definamos el vector

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, para $\alpha > 0$, construyamos los siguientes vectores

$$\begin{aligned} y &= x + \alpha\mu \\ z &= x - \alpha\mu \end{aligned}$$

Es claro que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ y que $y, z \in P$, para α suficientemente pequeño.

Además, $x \neq y, y \neq z, z \neq x$, por lo tanto x es combinación convexa de dos puntos distintos en $P, \Rightarrow$ no es extremo. Esto es contradicción.

Así, $A^1, \ldots, A^k$ son linealmente independientes, lo que implica, en particular, que $k \leq m$. También sabemos que $m \leq n$. Por tanto, podemos considerar $B = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)$ base y así:

$$b = Ax = [B \ \ N]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_m + N\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n-m} = Bx_B$$

$\rightarrow \ x_B = B^{-1}b$ y $x_N = 0$ y además $0 \leq x_B = B^{-1}b$.

Ejemplo 1.9

Consideremos el poliedro dado por el sistema $Ax = b$ donde sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los puntos extremos del poliedro, mirando las bases que forman el sistema. (este proceso es mirar las intersecciones de las restricciones por variables/columnas, realmente cogiendo una matrix cuadrada de A que es linealmente independiente).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{no invertible}$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{invertible} \ \ B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{no positivo}$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \text{invertible} \ \ B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{positivo}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{invertible} \ \ B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{no positivo}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \text{invertible} \ \ B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{positivo}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{invertible} \ \ B^{-1}b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{no positivo}$$

Vemos que los casos $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ por el teorema de caracterización de puntos extremos nos dan puntos extremos. El primer caso utiliza la primera y cuarta columnas de A, entonces $x^T = (\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{2})$. El segundo caso utiliza la segunda y cuarta columnas de A, entonces $x^T = (0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$. ■

Corolario 1.3.1

Sea $x \in S$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ con $x_i > 0, i = 1, \ldots, k \leq m$. Entonces x es un punto extremo de S si u solo si las columnas $\{a_1 \ldots, a_k\}$ de S son linealmente independientes.

otra definición del libro? p17

Corolario 1.3.2
El número de puntos extremos de S es finito y menor o igual que $\binom{n}{m}$.

$$nCm = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Demostración 1.5
Hay a lo sumo $\binom{n}{m}$ formas de elegir las m columnas independientes de A y cada matriz B está asociada a lo más a un punto extremo. ■

■ **Ejemplo 1.10**

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + s_2 = 3 \\ & x_1 + s_3 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si formamos el sistema de restricciones en la forma $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para identificar los puntos extremos/soluciones factibles, formamos las bases y comprobamos $B^{-1}b$. Desde el corolario anterio, sabemos que hay como mucho $\binom{n}{m} = \binom{5}{3} = 10$ puntos extremos.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Por ejemplo, usando como base (x_1, x_2, s_1) (es decir que igualamos (s_2, s_3) a cero), hallamos $x_B = B^{-1}b$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cofactor} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, adj(B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, det(B_1) = -1$$

$$B_1^{-1} = \frac{1}{det(B_1)} adj(B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que esto es una solución básica factible, y óptima en este caso.

Si analizamos otra base, (x_2, s_1, s_3):

$$B_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, adj(B_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, det(B_6) = -1$$

$$B_6^{-1} = \frac{1}{det(B_6)} adj(B_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_6} = B_6^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que no cumple la condición de no negatividad, entonces no es un punto factible. ■

degenerate variables/solutions? página 112 libro azul.

Teorema 1.3.2 — de existencia de puntos extremos.
Sea $S = x : Ax = b, x \geq 0$ con $A \in \mathscr{M}^{m \times n}, rango(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces S tiene al menos un punto extremo.

Teorema 1.3.3 — de representación de conjuntos finitos.
Sea $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathscr{M}^{m \times n}$, $rango(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sean $x_1, \ldots x_k$ los puntos extremos de S. Entonces $x \in S$ sii x puede escribirse como:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \; \forall j = 1, \ldots, k$$

Es decir, que en un conjunto convexo **finito**, cualquier punto factible se puede escribir como una combinación convexa de los puntos extremos.

■ **Ejemplo 1.11**
Necesario? Es igual a la combinación convexa de un conjunto convexo acotado. ■

Definición 1.3.2 — Polítopo.
Se llama **polítopo** a la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos.

Desde esta definición, vemos que todo polítopo es envoltura de sus puntos extremos. Es obvio que todo polítopo es un poliedro, pero no al revés. No se puede formar una envoltura convex de un poliedro no acotado.

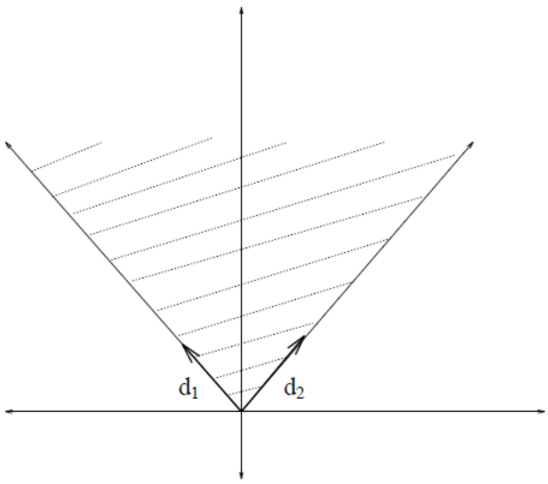
■ Ejemplo 1.12
Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq |x_1|\}$. Dado que

$$x_2 \geq |x_1| \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 \geq x_1 \geq -x_2,\ x_2 \geq 0.$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq 0.$$

La gráfica de la función es:



Vemos que el único punto extremo es $(0,0)^T$, y no podemos definir ningún punto de S como combinación convexa de sus puntos extremos. ■

1.3.1 Direcciones y direcciones extremas

Conjuntos acotados/no acotados son importantes en problemas de optimización lineal cuando pensamos en el comportamiento de la función objetivo. Si una función objetivo de un problema de max crece en la dirección donde el conjunto factible está no acotado, no existirá el máximo.

Para hablar de conjuntos convexos no acotados, es necesario definir una **dirección** de un conjunto, y sus **direcciones extremas**.

Definición 1.3.3 — Dirección de un conjunto.
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, un vector $d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ es una **dirección** de S si $x + \mu d \in S \ \ \forall x \in S, \mu \geq 0$.

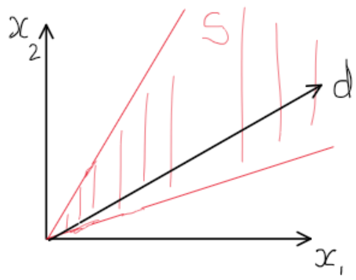
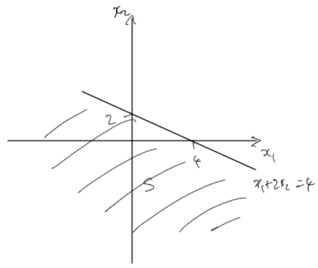


Figura 1.2: Dirección de un conjunto

■ **Ejemplo 1.13**
Encuentra los puntos extremos y direcciones del conjunto poliédrico siguiente:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_1 + 2x_2 \leq 4\}$$

Por ser un conjunto no acotado definido por una única restricción, no existen puntos extremos. Podemos graficar el conjunto:



Las direcciones del poliedro tienen que cumplir $x + \mu d \in S, \forall x \in S$. Entonces tenemos

$$(x_1 + \mu d_1) + 2(x_2 + \mu d_2) \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 + \mu(d_1 + 2d_2) \leq 4$$

Si $\mu \geq 0$ y también $x_1 + 2x_2 \leq 4$, entonces $d_1 + 2d_2 \leq 0$.

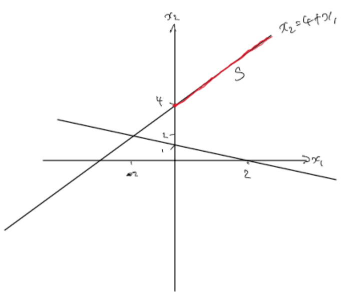
$$Direcciones = \{(d_1, d_2) \; : d_1 + 2d_2 \leq 0\}$$

■

■ **Ejemplo 1.14**

Encuentra los puntos extremos y direcciones del conjunto poliédrico siguiente:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_1 + 2x_2 \geq 2, -x_1 + x_2 = 4, x_1, x_2 \geq 0\}$$



Vemos que el único punto extremo es $(0,4)$.

Para las direcciones miramos ambas restricciones, considerando la definición de una dirección.

$$\begin{aligned} x_1+\mu d_1+2(x_2+\mu d_2)\geq 2 &\qquad -x_1-\mu d_1+x_2+\mu d_2=4\\ x_1+2x_2+\mu(d_1+d_2)\geq 2 &\qquad -x_1+x_2+\mu(d_2-d_1)=4 \end{aligned}$$

Si tenemos $x_1+2x_2\geq 2, -x_1+x_2=4$, entonces $d_1+2d_2\geq 0$ y $d_2-d_1=0$. Por su intersección $d_2=d_1$.

$$direcciones=\{(a,a)\ :\ a\in\mathbb{R}^+\}$$

■

Lema 1.3.1
Consideremos el poliedro $S=\{x:Ax=b,x\geq 0\}$, entonces d es una **dirección** de S si y solo si d satisface el sistema $Ad=0$ y $d\geq 0$.

Si $Ax=b, x\geq 0$ con dirección d, entonces x y $x+\mu d$ son ambos factibles por todo $\mu\geq 0$. Entonces $Ax=b\ \Rightarrow\ A(x+\mu d)=b\ \Rightarrow\ Ax+\mu Ad=b\ \Rightarrow\ Ad=0$.

■ **Ejemplo 1.15**

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar}\quad & z=-x_1-2x_2\\ \text{s.a}\quad & -2x_1+x_2\leq 2\\ & -x_1+x_2\leq 3\\ & x_1,x_2\geq 0. \end{aligned}$$

La región factible es:

gráfica

Demuestra que $d_1=(1,0)^T$ es una dirección de la región. Determine las direcciones del problema escrito en forma estándar y verificar que cumplen $Ad=0$ y $d\geq 0$.

Dirección $d_1=(1,0)^T$:

Si d_1 es una dirección de la región factible, tiene que pertenecer a la región $x+\mu d_1$ con $\mu\geq 0$, $\forall x$ factible. Para esta dirección, vemos que $x+\mu d_1=(x_1+\mu,x_2)^T$. Para demostrar que es dirección, tenemos que confirmar que cumple las restricciones de la región factible: $-2x_1+x_2\leq 2, -x_1+x_2\leq 3, x_1,x_2\geq 0$.
Si x_1,x_2 pertenecen a la región,

$$\begin{aligned} -2(x_1+\mu)+x_2 &= -2x_1+x_2-2\mu\\ &\leq 2-2\mu \qquad (-2x_1+x_2\leq 2)\\ &\leq 2 \qquad (\mu\geq 0) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} -(x_1+\mu)+x_2 &= -x_1+x_2-\mu\\ &\leq 3-\mu\\ &\leq 3 \qquad (\mu\geq 0) \end{aligned}$$

También tenemos $x_1+\mu \geq 0, x_2 \geq 0$. Entonces, confirmamos que d_1 es una dirección de la región factible.

El sistema en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z=-x_1-2x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1+x_2+s_1=2 \\ & -x_1+x_2+s_2=3 \\ & x_1,x_2,s_1,s_2 \geq 0. \end{array}$$

La inclusión de variables de holgura se puede tratar como una forma de parametrizar las restricciones, entonces hacemos el siguiente cambio al sistema (sin perder la no-negatividad):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1+\lambda_1-\lambda_2 \\ x_2 &= 4+\lambda_1-2\lambda_2 \\ s_1 &= \lambda_1 \\ s_2 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

(estamos tratando s_1,s_2 como variables libres. Variables que van a aparecer en la solución.)

Para sacar las direcciones, usamos la propiedad $x+\mu d \in S, \forall x \in S$. Teniendo en cuenta que μ_1,μ_2 también tendrán las direcciones d_3 y d_4 respectivamente:

$$s_1=\lambda_1 \quad \to \quad s_1+\mu d_3=\lambda+\mu d_3 \quad \to \quad d_3=d_3$$

de la misma forma $d_4=d_4$.

Si $x_1=1+\lambda_1-\lambda_2$, usando $x+\mu d$ y cancelando, tenemos

$$\begin{aligned} x_1+\mu d_1 &= 1+\lambda_1+\mu d_3-\lambda_2-\mu d_4 \\ d_1 &= d_3-d_4 \end{aligned}$$

Si $x_2=4+\lambda_1-2\lambda_2$, usando $x+\mu d$ y cancelando, tenemos

$$\begin{aligned} x_2+\mu d_2 &= 4+\lambda_1+\mu d_3-2\lambda_2-2\mu d_4 \\ d_2 &= d_3-2d_4 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d=\begin{pmatrix} d_3-d_4 \\ d_3-2d_4 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

donde $d_3,d_4 \geq 0$.

■

Definición 1.3.4
Dos direcciones d_1 y d_2 se dirán **iguales** si y sólo si $d_1=\alpha d_2$ para algún $\alpha>0$.

Definición 1.3.5 — Dirección Extrema.
Sea S un convexo cerrado y $d \in \mathbb{R}^n$ una dirección de S. Se dice que d es una **dirección extrema** si no puede expresarse como una combinación lineal positiva de dos direcciones distintas. Es decir, si $d = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 \ \ \mu_1, \mu_2 > 0$, entonces $d = d_1 = d_2$.

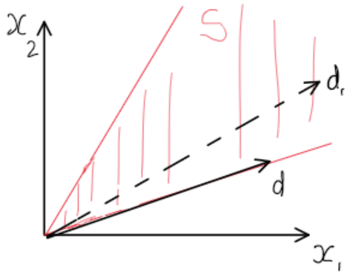


Figura 1.3: Dirección extrema de un conjunto

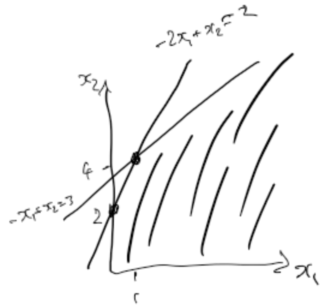
Teorema 1.3.4 — de caracterización de direcciones extremas.
Sea un poliedro $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathscr{M}^{m \times n}$, $rango(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\bar{d}$ es una **dirección extrema** de S si y solo si A puede ser descompuesto como $[B|N]$ donde $B \in \mathscr{M}^{m \times m}$ es invertible y $\bar{d}$ es un múltiplo positivo de $d = \binom{-B^{-1}a_j}{e_j}$ con $B^{-1}a_j \leq 0$, donde $a_j \in N$ (es un vector columna de N) y e_j es un $n-m$ vector de ceros excepto en la posición j donde tiene 1.

Corolario 1.3.3
El número de direcciones extremas de S es finito y menor o igual que $(n-m)\binom{n}{m}$.

Demostración 1.6
Hay a lo más $\binom{n}{m}$ formas de elegir B^{-1} y como hay $n-m$ columnas en N, entonces $(n-m)\binom{n}{m}$ es el número máximo de direcciones extremas. ■

■ **Ejemplo 1.16**

$$\min \; -x_1 - 2x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Forma estándar

$$-2x_1 + x_2 + s_1 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + s_2 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4C2 = 6 \qquad n - m = 4 - 2 = 2$$

$\Rightarrow$ 12 direcciones extremas (como mucho)

1) $s_1 = s_2 = 0$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_1) = -1 \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad -B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\le 0 \quad B_1^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\le 0$$

no factible no factible

2) $x_2 = s_2 = 0$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_2) = 1 \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \le 0 \quad B_2^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \le 0$$

$$-B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad -B_2^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $x_1 = x_2 = 0$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_3) = 1 \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1}N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1}N_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

no factible

4) $B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_4^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4^{-1}N_4 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No factible

5) $B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B_5^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5^{-1}N_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no factible

6) $B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_6 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_6^{-1}N_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no factible no factible.

■

■ **Ejemplo 1.17** Usando un ejemplo anterior, consideremos un poliedro en al forma canónica dado por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo al corolario anterior, existen $(4-2)\binom{4}{2} = 12$ posibles direcciones extremas. Solo consideramos el siguiente caso: tomamos la matriz B formada por la segunda y cuarta columnas de A. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Luego $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. El producto de B^{-1} con la primera columna de N no es negativo, no nos permite calcular una dirección extrema. Sin embargo, el producto con la segunda columna de N es negativo. Ordenamos la información para deducir la dirección extrema correspondiente: $d = (0\frac{1}{2}1\frac{1}{2})^T$. ■

Teorema 1.3.5 — de representación de conjuntos poliedricos.
Sea $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathscr{M}^{m\times n}$, $rango(A) = m$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sean $x_1, \ldots x_k$ los puntos extremos de S y $d_1, \ldots d_l$ las direcciones extremas de S. Entonces $x \in S$ sii x puede escribirse como:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d_i$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \qquad \lambda_j \in [0,1], \ \forall j = 1, \ldots, k$$

$$\mu_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, \ldots l$$

Es decir, que cualquier punto factible del sistema puede ser expresado por una combinación convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal de las direcciones extremas.

■ **Ejemplo 1.18**
Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ -x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

El sistema de restricciones $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \binom{2}{3}$ nos da la región factible del problema, y sus puntos extremos, ilustrado en Figura 1.4.

incluye la resolución para los punto extremos?

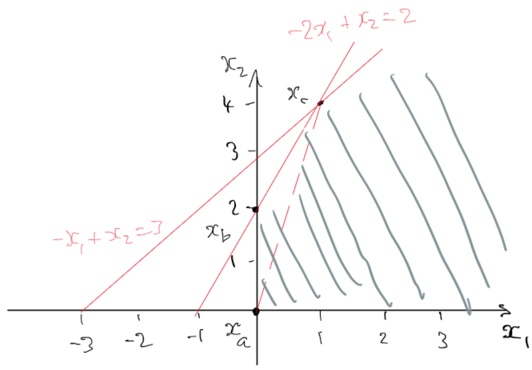


Figura 1.4: Región factible no acotada

■

Vemos que en el triangulo formado por los puntos extremos, podemos escribir cualquier punto factible como una combinación convexa de dichos puntos extremos. Sin embargo, el resto de la región factible no se puede expresar igual.

Por ejemplo, el punto $y = (2,1)^T$ no puede estar expresado como una combinación convexa de los puntos extremos $x_a = (0,0)^T, x_b = (0,2)^T$ y $x_c = (1,4)^T$. Comprobamos esto con la solución del sistema de ecuaciones dado por la definición de una combinación convexa:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_a + \lambda_2 x_b + \lambda_3 x_c &= y \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución única de este sistema es $\lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = \frac{-7}{2}, \lambda_3 = 2$. Necesitamos $\lambda \geq 0$, entonces $y = (2,1)^T$ no se puede expresar como una combinación convexa de los puntos x_a, x_b y x_c.

Si calculamos las direcciones extremas de este conjunto

Teorema 1.3.6
$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ tiene al menos una dirección extrema si y sólo si P es no acotado.

Demostración 1.7
$(\Longrightarrow)$ Si P tiene una dirección extrema d, entonces es no acotado puesto que $\forall x \in P$ se tiene que $x + \lambda d \in P, \forall \lambda \geq 0$ y por tanto $\lim_{\lambda \to \infty} ||x + \lambda d|| = \infty$.

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que P es no acotado y que no posee direcciones extremas. Luego, por el teorema anterior, todo punto $x \in P$ puede escribirse de la forma $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, para algunos $\lambda_i \in [0,1], \forall i = 1, \ldots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Por la desigualdad triangular

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i|| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i ||x_i|| \leq \sum_{i=1}^{k} ||x_i|| < \infty \quad \forall x \in P$$

lo que contradice que P sea no acotado. ■

1.3.2 Teorema fundamental de la programación lineal

Consideremos el problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & (PPL) \\ \text{s.a} & Ax = b & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Sea P el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$.

Teorema 1.3.7 — Teorema fundamental de la programación lineal. Consideremos (PPL), factible. Sean $x_1, \ldots, x_k$ los puntos extremos y $d_1, \ldots, d_l$ las direcciones extremas del conjunto factible.

PPL tiene solución óptima sii $c^T d_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, l$. Además dicha solución siempre se alcanza en uno de los puntos extremos del conjunto factible.

Demostración 1.8

$\Longleftarrow$ Planteamos el problema PPL. Por el teorema de representación de conjuntos poliédricos, si $x \in P$ podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k x_k + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j, \quad \lambda, \mu \geq 0, \quad \sum \lambda = 1.$$

y podemos reescribir PPL como

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \\ \sum \lambda = 1}} & c^T [\sum \lambda x + \sum \mu d] \end{cases}$$

Como $c^T d \geq 0 \ \Rightarrow$

$$\sum \lambda c^T x + \sum \mu c^T d \geq \sum \lambda c^T x \geq \sum \lambda c^T \bar{x} = c^T \bar{x} \sum \lambda = c^T \bar{x}$$

siendo $\bar{x}$ el punto que minimiza a $c^T x_i \ \Rightarrow \ c^T \bar{x}$ es el valor mínimo y $\bar{x}$ es un punto extremo. (por usar el teorema de representación de conjuntos poliédricos)

$\Longrightarrow$ (R.A) Supongamos que $\exists \ j : \ c^T d_j < 0$. Sea $x \in P$ fijo, $x + \lambda d_j \in P$ con $\lambda \geq 0$ por ser d_j una dirección extrema $\Rightarrow \ c^T (x + \lambda d_j) = c^T x + \lambda c^T d_j \ \rightarrow \ -\infty$ (cuando $\lambda \rightarrow +\infty$) por ser $c^T x$ constante y $c^T d_j < 0$. Entonces el problema no tiene solución óptima $\rightarrow\leftarrow$. $\Rightarrow c^T d \geq 0$. ■

1.4 Problemas

1. Resuelve gráficamente los siguientes problemas

   a.
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   c.
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   d.
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Halle (gráficamente) todos los valores de a tales que $(-3,4)^T$ es la solución del siguiente problema.
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = ax_1 + (2-a)x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

3. Convertir los siguientes problemas lineales a la forma estándar

   a.
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a} \quad & 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \leq 7, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq -2 \end{aligned}$$

4. Consideremos el sistema linea
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

   ¿Cúal es la matriz de coeficientes A? Resolver el sistema con su inversa.

5. Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ & x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

   Convertir el problema a la forma estándar, sin hacer el cambio $x_3 = x_3' - x_3''$. Demostrar que el problema se reduce a un problema equivalente con una variable y una restricción menos, eliminando x_3. ¿Por qué no se puede hacer lo mismo con variables con restricciones de no negatividad?
6. Cual es el conjunto de puntos extremos de $S = C_0(U)$ donde $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
7. Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -5x_1 - 7x_2 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 + 2x_2 + \leq 30 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a. Dibujar la región factible.
   b. Determinar los puntos extremos de la región factible (visualmente).
   c. Determinar las direcciones de la región factible.
   d. Convertir el problema a la forma estándar.
   e. Hallar los puntos extremos de la forma estándar.
   f. Hallar las direcciones extremas.
8. Sean $\{d_1, \ldots, d_k\}$ direcciones extremas del poliedro $S = \{x \ : \ Ax = b, x \geq 0\}$. Demostrar que

$$d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i$$

   con $\alpha_i \geq 0$ también es una dirección extrema.
9. Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 6x_1 + 8x_2 + \leq 24 \\ & x_2 - 2x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Representar el punto $x = (1,1)^T$ como una combinación convexa de puntos extremos, y si necesario, una dirección extrema. Hallar dos representaciones.
10. Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Cambiar el problema a la forma estándar.
b) Demostrar que $[0,3,2,0]^T$ es una solución básica factible. ¿Cuales son las variables básicas correspondientes?

11. Consideremos el sistema de restricciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

   a. Escribir el sistema en forma estándar y determinar las soluciones básicas (factible y no factibles).
   b. Determinar los puntos extremos del conjunto en forma estándar y canónica.

12. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -5x_1 - 7x_2 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 + 2x_2 + \leq 30 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a. Dibujar la región factible.
   b. Determinar los puntos factibles y dos direcciones distintas
   c. Representar el punto $x = (6,12)^T$ como una combinación convexa de los puntos extremos, y si es necesario, una dirección
   d. Razonar sobre si este problema tiene mínimo o no
   e. Convertir el problema a forma estándar y hallar los puntos extremos y las direcciones de este problema. Verificar que las direcciones cumplen $Ad = 0, d \geq 0$.

II Tema 2 - Método Simplex

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1section.1.2subsection.

chapter.3section.3.1subsection.3.1.1section.3.2section.3.3sectio

2. Método Simplex

2.1 Introducción

2.2 Método Simplex

Los teoremas del tema anterior aseguran que para buscar el óptimo de (PPL) basta buscar entre las soluciones básicas factibles. (es decir, los puntos extremos.)

En resumen, el método Simplex empieza desde una solución básica factible de un problema lineal escrito en forma estándar, comprueba si es óptimo y si no, calcula direcciones extremas y mueva hacía otra solución básica factible que reduce el valor de la función objetivo. Este proceso se repite en iteraciones, hasta llegar al óptimo.

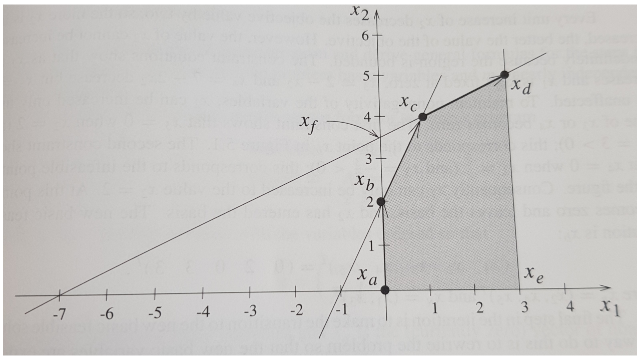
Demostramos el método con un ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 7 \\ & x_1 + s_3 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

donde la región factible está dibujada en la siguiente gráfica



Tenemos que empezar desde una solución básica factible. Su elección es importante, y lo hablaremos más adelante. Por ahora, en este ejemplo tenemos una variable de holgura en cada restricción. Por lo tanto, sus coeficientes forman la matriz de identidad, y es una solución básica factible obvia.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cogemos como base s_1, s_2, s_3 variables básicas, y $x_1, x_2 = 0$ variables no-básicas, viendo que s_1, s_2, s_3 salen positivas.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Dando como solución básica factible:

$$(x_1 \; x_2 \; s_1 \; s_2 \; s_3)^T = (0\;0\;2\;7\;3)^T$$

que corresponde con x_a en la gráfica.

Probamos a ver si este punto es óptimo. Para determinar esto, deberíamos mirar si existen direcciones factibles tales que el valor de la función objetivo decrece. Escribimos las restricciones en términos de las variables no-básicas:

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ s_2 &= 7 + x_1 - 2x_2 \\ s_3 &= 3 - x_1 \end{aligned}$$

Cualquier otro punto factible se puede encontrar cambiando los valores de las variables no-básicas x_1, x_2. Las variables básicas tienen valor 0 ahora mismo, y todas las variables tienen que ser positivas para ser factibles, por lo tanto solo podemos aumentar el valor de una de ellas.

Nuestro objetivo es minimizar la función objetivo $z = -x_1 - 2x_2$, cuyo valor actual es 0. Entonces si cualquiera de las variables no-básicas x_1, x_2 aumenta en valor, el valor de la función objetivo reducirá. Por lo tanto, la base actual no es óptimo.

Para mover a otra base (otra solución básica factible) el mñtodo de Simplex cambia una variable básica por una variable no-básica. (esto corresponde a mover entre soluciones básicas factibles adyacentes). En este caso tenemos dos variables no-básicas, x_1, x_2. Elegimos la variable no-básica con mayor coeficiente (absoluto), con la esperanza de llegar antes al óptimo. Con función objetivo

$z = -x_1 - 2x_2$ vemos que la variable x_2 tiene mayor coeficiente, aunque por tener una región acotada no podemos aumentarlo demasiado.

Fijando en las restricciones, y teniendo en cuenta que ninguna variable puede ser negativa, entonces si quedamos con $x_1 = 0$ solo podemos aumentar x_2 hasta que s_1, s_2 o s_3 llega a 0.

Si aumentamos x_2 a 2 en la primera restricción, tenemos $s_1 = 0$ y $s_2 = 3$, correspondiente al punto x_b en la gráfica. En la segunda restricción, vemos que $s_2 = 0$ cuando $x_2 = \frac{7}{2}$, dando $s_1 = -\frac{3}{2} < 0$, correspondiente al punto infactible x_f.

Entonces x_2 entra en la base con valor 2, y s_1 sale de la base con valor 0. La nueva solución básica factible es:

$$(x_1\ x_2\ s_1\ s_2\ s_3)^T = (0\ 2\ 0\ 3\ 3)^T$$

donde $x_B = (x_2, s_2, s_3)^T$ y $x_N = (x_1, s_1)^T$.

El último paso en la iteración es cambiar el problema a la base nueva. Re-escribimos la función objetivo para solo contener variables no-básicas, y re-escribir las restricciones en términos de las variables no-básicas. (así podemos hacer el análisis de antes, en la siguiente iteración). Usamos una restricción para remplazar la variable entrando en la base x_2 por $x_2 = 2 + 2x_1 - s_1$, dando

$$\text{minimizar} \quad z = -4 - 5x_1 + 2s_1$$

con restricciones en términos de las variables nobásicas:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 + x_1 - s_1 \\ s_2 &= 3 - 3x_1 + 2s_1 \\ s_3 &= 3 - x_1 \end{aligned}$$

con todas las variables no negativas. Tenemos $x_1 = s_1 = 0$, dando valor objetivo $z = -4$. Con variables básicas $x_2 = 2, s_2 = 3$ y $s_3 = 3$. Esto acaba la primera iteración del método de Simplex.

Empezamos la siguiente iteración, probando optimalidad de la solución básica factible, cambiando variables etcetc. En este caso, llegamos hasta x_d donde vemos que es el óptimo.

2.2.1 Fórmula general

Ahora consideremos el problema lineal general, donde asumimos que el problema tiene n variables y m restricciones de igualdad linealmente independientes.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Sea x una solución básica factible, con el problema ordenado tal que

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},$$

donde x_B es el vector de la variables básicas y x_N es el vector de las variables no-básicas (nulas). La función objetivo se puede escribir como

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N,$$

donde los coeficientes de las variables básicas están en c_B y de las no-básicas en c_N. Las restricciones se pueden escribir como

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N.$$

Si definimos $y = (c_B^T B^{-1})^T = B^{-T} c_B$, podemos reescribir z como

$$z = y^T b + (c_N^T - y^T N)x_N.$$

Al vector y se le llama los **multiplicadores Simplex**. El valor actual de las variables básicas y la función objetivo se obtiene con $x_N = 0$:

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b \qquad \hat{z} = c_B^T B^{-1} b$$

Definición 2.2.1 — Coste reducido.
Sea $\hat{c}_j$ el número en el vector $\hat{c}_N^T = (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)$ correspondiente a x_j. Al valor $\hat{c}_j$ se le llama el **coste reducido** de la variable x_j.

Analizamos los costes reducidos del problema, donde un cambio en las variables en la base provocará un cambio en la función objetivo.

1. Si $-\hat{c}_N^T > 0$, mejoramos el valor de la función objetivo con un cambio en una variable no-básica. Consideremos $\bar{x} = \hat{x} + \lambda d_k$, con dirección:

   $$d_k = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_k \end{pmatrix}$$

   En la función objetivo:

   $$\bar{z} = c^T \bar{x} = c^T(\hat{x} + \lambda d_k) = \hat{z} - \lambda(c_B^T B^{-1} a_k - c_k^T)$$

   Tenemos $-\hat{c}_N^T = -c_N^T + c_B^T B^{-1} N > 0, \lambda > 0$, entonces $\bar{z} < \hat{z}$. $\rightarrow$ mejor solución.

   Tenemos que comprobar que $\bar{x}$ sigue siendo factible. Comprobamos $Ad_k = 0$, por ser dirección extrema del conjunto.

   $$A\bar{x} = Ax + \lambda Ad_k = b, \;\; \lambda > 0$$

   Para garantizar que $\hat{x} \geq 0$, miramos al signo de $B^{-1}A_k$:

   a. Si $(B^{-1}A)_k \leq 0$, entonces $d_k \geq 0$ y $\hat{x}$ es factible por todo λ. Por el teorema de caracterización de direcciones extremas, d_k es una dirección extrema del poliedro tal que la función objetivo es:

   $$c^T d_k = -c_B^T(B^{-1}A)_k + c_k = -\hat{c}_N^T < 0$$

   lo cual indica que en esa dirección, la función objetivo decrece sin límite $(\lambda > 0)$.

   $\Longrightarrow$ **(PPL) no tiene solución óptima finita**.

b. Si $(B^{-1}A)_k > 0$ para alguna variable básica con indice i, miramos la base por variables i: $(x_B)_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,k}x_i$.

Entonces la variable x_i puede crecer, sin violar la restricción de no negatividad, según:

$$\hat{x}_i = \min_{1\leq j\leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_j}{(B^{-1}a_j)_k} \;:\; (B^{-1}a_j)_k > 0 \right\},$$

donde el mínimo para $\hat{x}_i$ identifica la nueva variable no-básica que sale de la base. Los nuevos valores de las variables básicas y la función objetivo se puede calcular según:

$$x_B \leftarrow x_B - (B^{-1}A)_k\hat{x}_k \qquad \hat{z} \leftarrow \hat{z} + \hat{c}_k\hat{x}_k$$

La variable x_k está asignada el valor $\hat{x}_k$ y las variables no-básicas siguen con valor cero.

2. Si $-\hat{c}_N^T \leq 0$, ninguna variable no-básica puede provocar una mejora en la función objetivo, $\hat{z} \leq z \rightarrow$ **SOLUCIÓN ÓPTIMA**.

a. Si $-\hat{c}_N^T < 0 \;\; \forall$ variables no-básicas $\Rightarrow$ **SOLUCIÓN ÓPTIMA ÚNICA**.

b. Si $-\hat{c}_N^T = 0$ por alguna variable no-básica, tendremos varios óptimos. (lo estudiamos aparte)

Algoritmo Simplex

Ahora podemos resumir el método simplex en sus pasos, empezando desde una matriz base B correspondiente a la solución básica factible $x_B = \hat{b} = B^{-1}b \geq 0$. Los pasos son:

1. *Probar Optimalidad* - Calcular $y^T = c_B^T B^{-1}$. Calcular coeficientes $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N$. Si $\hat{c}_N^T \geq 0$, la base actual es óptima. Si no, elegir una variable no-básica (variable entrada) x_t con $\hat{c}_t < 0$ para entrar en la base.
2. *Incrementar variable entrada* - Calcular $\hat{A}_t = B^{-1}A_t$, los coeficientes de la variable entrada. Buscar indice i tal que
$$\frac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{s,t}} = \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} \;:\; \hat{a}_{i,t} > 0 \right\}.$$
Este paso determine la variable para salir de la base.
3. *Actualizar* - Calcular la matriz base B y el vector de las variables básicas x_B.

La prueba de optimalidad es *local* porque solo incluye los costes reducidos en la base actual. Sin embargo, problemas lineales son convexos por definición, entonces el óptimo local es también global.

■ Ejemplo 2.1

Siguiendo con el ejemplo anterior, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Empezamos desde la base formada por las variables de holgura $x_B = (s_1, s_2, s_3)^T$, dando $x_N = (x_1, x_2)^T$. Entonces tenemos $B = I = B^{-1}, c_B^T = (0,0,0), c_N^T = (-1,-2)$ y

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos variables básicas $x_B = \hat{b} = B^{-1}b = (2,7,3)^T$.

Paso 1 - Probar Optimalidad
Calculamos los coeficientes Simplex $y^T = c_B^T B^{-1} = (0 \ \ 0 \ \ 0)$ y el coste reducido $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (-1 \ \ -2)$.
Ambos componentes de $\hat{c}_N^T$ son negativos, entonces la base no es óptima. $(\hat{c}_N^T)_2$ tiene el valor absoluto más grande, entonces elegimos la variable no-básica x_2 para entrar en la base (variable entrada).

Paso 2 - Incrementar variable entrada
Calculamos la columna entrada

$$\hat{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dando ratios de cambio $\frac{\hat{b}_1}{\hat{a}_{1,2}} = 2$ y $\frac{\hat{b}_2}{\hat{a}_{2,2}} = \frac{7}{2}$.

El primero es menor, entonces la primera variable básica sale de la base (s_1).
Paso 3 - Actualizar
Entonces la base nueva es

$$x_B = x_B - (B^{-1}A)_k \hat{x}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces x_2 entra en la base con valor 2. Acabamos con base nueva $x_B = (x_2, s_2, s_3)^T$ y variables no-básicas $x_N = (x_1, s_1)^T$. Actualizamos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $c_B^T = (-2,0,0)$ y $c_N^T = (-1,0)$.

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pasamos a iteración dos:

Paso 1 - Probar Optimalidad
Calculamos los coeficientes Simplex $y^T = c_B^T B^{-1} = (-2 \ \ 0 \ \ 0)$ y el coste reducido $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (-5 \ \ 2)$.
El primer componente de $\hat{c}_N^T$ es negativo, entonces la base no es óptima. Elegimos la variable

no-básica x_1 para entrar en la base (variable entrada).

Paso 2 - Incrementar variable entrada
Calculamos la columna entrada

$$\hat{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dando ratios de cambio $\frac{\hat{b}_2}{\hat{a}_{2,1}} = 1$ y $\frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{3,1}} = 3$. Entonces la segunda variable en la base es la variable saliendo de la base (s_2).

Observación: $\hat{a}_{1,1} < 0$, entonces no se puede modificar.

Paso 3 - Actualizar
Entonces la base nueva es

$$x_B = x_B - (B^{-1}A)_k \hat{x}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Acabamos con base nueva $x_B = (x_2, x_1, s_3)^T$ y variables no-básicas $x_N = (s_2, s_1)^T$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $c_B^T = (-2, -1, 0)$ y $c_N^T = (0, 0)$. Entonces,

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pasamos a iteración tres:

Paso 1 - Probar Optimalidad
Calculamos los coeficientes Simplex $y^T = c_B^T B^{-1} = (\frac{4}{3} \ \ -\frac{5}{3} \ \ 0)$ y el coste reducido $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (\frac{5}{3} \ \ -\frac{4}{3})$.
El segundo componente de $\hat{c}_N^T$ es negativo, entonces la base no es óptima. Elegimos la variable no-básica s_1 para entrar en la base (variable entrada).

Paso 2 - Incrementar variable entrada
Calculamos la columna entrada

$$\hat{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

dando ratio de cambio $\frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{3,2}} = 3$. Entonces la tercera variable en la base es la variable saliendo de la base (s_3).

Paso 3 - Actualizar

Entonces la base nueva es

$$x_B = x_B - (B^{-1}A)_k \hat{x}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} 3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Acabamos con la base $x_B = (x_2, x_1, s_1)^T$ y variables no-básicas $x_N = (s_2, s_3)^T$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $c_B^T = (-2, -1, 0)$ y $c_N^T = (0, 0)$. Entonces,

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pasamos a iteración cuatro:

Paso 1 - Probar Optimalidad
Calculamos los coeficientes Simplex $y^T = c_B^T B^{-1} = (0 \quad -1 \quad -2)$ y el coste reducido $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (1 \;\; 2)$.
La base es óptima, por no tener coste reducido negativo.

■

2.2.2 Forma tabla

El método Simplex se suele escribir en la forma tablada, cuando se resuelve a mano. Aparte de presentar los coeficientes en una forma fácil de leer, la tabla deja el usuario actualizar la matriz inversa en cada iteración usando operaciones de Gauss, en vez de calcularla de nuevo.

Un problema lineal escrito en la forma estándar tiene tabla:

Básica	x_B	x_N	Valor
$-z$	c_B^T	c_N^T	0
x_B	B	N	b

donde la parte inferior de la tabla contiene la matriz A, la segunda fila contiene los coeficientes de las variables en la función objetiva, la primera columna as variables básicas y la última columna los valores de las variables y la función objetivo.

Observación: Aparece $-z$ por costumbre de convertir la función objetivo en $-z + c^T x = 0$.
Consideremos el ejemplo anterior para demostrar:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 7 \\ & x_1 + s_3 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Con tabla inicial

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	-1	-2	0	0	0	0
s_1	-2	1	1	0	0	2
s_2	-1	2	0	1	0	7
s_3	1	0	0	0	1	3

Si elegimos las variables de holgura para ser la base inicial, tenemos la tabla en forma general:

Básica	x_B	x_N	Valor
$-z$	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

El método Simplex empieza con paso 1, optimalidad. En nuestro ejemplo, los costes reducidos de las variables no-básicas son negativos. Entonces la base no es óptima. El coste de la variable x_2 tiene el mayor valor absoluto, entonces es la variable entrada.

Para determinar la variable salida en paso 2, fijamos en los valores positivos de los coeficientes, y calculamos los ratios $\hat{b}_t/\hat{a}_{i,t}$. Vemos en este ejemplo que las restricciones s_1 y s_2 tienen coeficientes positivos, y si dividimos la última columna por estos coeficientes tenemos $\hat{b}_2/\hat{a}_{1,2} = 2/1$ y $\hat{b}_2/\hat{a}_{2,2} = 7/2$. El mínimo de los ratios es en la primera restricción, entonces la variable salida es s_1.

En la tabla, marcamos la variable entrada y también la variable *pivote*:

Básica	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	-1	-2	0	0	0	0
s_1	-2	$\boxed{1}$	1	0	0	2
s_2	-1	2	0	1	0	7
s_3	1	0	0	0	1	3

El tercer paso del método actualice los valores en términos de la base nueva. Esto se puede conseguir usando la forma general de la tabla de antes, o bien usando Gauss para transformar la columna de la variable entrada en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En este caso, sumamos 2 veces la fila s_1 a la fila $-z$, y restamos 2 veces la fila s_1 de la fila de s_2, acabando con:

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	-5	0	2	0	0	4
x_2	-2	1	1	0	0	2
s_2	3	0	-2	1	0	3
s_3	1	0	0	0	1	3

Vemos que las base no es óptima, y que la variable entrada es x_1. Dos restricciones tienen coeficientes positivos, y los ratios dan $3/3$ y $3/1$ respectivamente. Por lo tanto, s_2 es la variable salida.

Básica	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	-5	0	2	0	0	4
x_2	-2	1	1	0	0	2
s_2	$\boxed{3}$	0	-2	1	0	3
s_3	1	0	0	0	1	3

Haciendo operaciones llegamos a:

Básica	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{s_1}$	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	9
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	4
x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
s_3	0	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	1	2

siguiente iteración

Básica	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{s_1}$	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	0	0	1	2	13
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	0	0	1	3
s_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

No hay ningún coste reducido negativo, por lo tanto la base es óptima. Vemos que la solución es $z = -13, x_1 = 3, x_2 = 5, s_1 = 3$.

2.2.3 Soluciones Múltiples

Un problema lineal puede tener varias soluciones óptimas, que ocurre cuando el coste de una variable no-básica es cero en la base óptima.

■ **Ejemplo 2.2**
Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Completando una iteración del método de Simplex, tenemos la tabla:

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	0	0	0	1	3
s_1	0	1	1	0	2	8
s_2	0	1	0	1	1	6
x_1	1	0	0	0	1	3

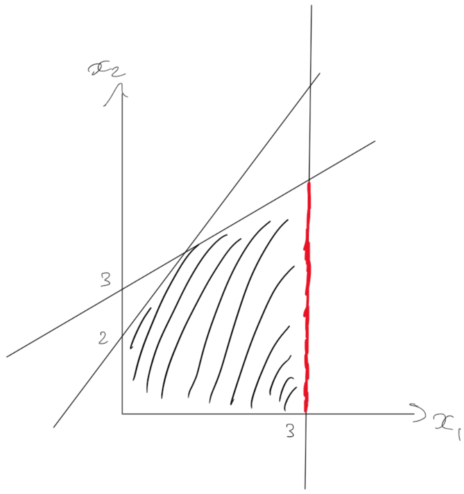
Vemos que la base es óptima (ningún coste reducido negativo) pero el coste reducido de la variable no-básica x_2 es cero también. Esto indica que si entrara en la base, la función objetivo no cambiaría y sería óptima. Si hacemos el cambio:

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	0	0	0	1	3
s_1	0	0	1	-1	1	2
x_2	0	1	0	1	1	6
x_1	1	0	0	0	1	3

(el ratio $8/1$ es mayor que $6/1$, por lo tanto elegimos el menor).

La base nueva es óptima otra vez (ningún coste reducido negativo) pero también el coste reducido de la variable no-básica s_2 es cero, y entramos en bucle. Vemos que ambas soluciones son óptimas.

Observación: Cualquier combinación convexa de las dos soluciones también será óptima, y corresponden a un lado del conjunto factible.



Por lo tanto tenemos valor óptimo $z^* = -3$, y solución $x = \{(x_1, x_2)\mathbb{R}^2 \, : \, x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$

■

2.3 Problemas no acotados

En el segundo paso del método de Simplex, cabe la posibilidad de tener un problema no acotado. Si $\hat{a}_{i,t} > 0$ la variable básica $(x_B)_i$ decrecerá cuando la variable entrada x_t crece, y $(x_B)_i$ tendrá valor cero cuando $x_t = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}}$. Si $\hat{a}_{i,t} \leq 0 \; \forall i$, entonces ninguna de las variables básicas decrecerá cuando x_t crece. Esto implica que x_t puede crecer sin límite y la región factible es no acotado. La función objetivo cambiará por $\hat{c}_t x_t$ cuando x_t crece. La variable entrada ha sido elegida porque $\hat{c}_t < 0$, entonces la función objetivo decrecerá sin límite y no existe un mínimo finito.

■ Ejemplo 2.3
Consideremos el problema lineal siguiente

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Después de dos iteraciones del método de Simplex, la base actual es $x_B = (x_1, x_2)^T$ con $x_N = (s_1, s_2)^T$,

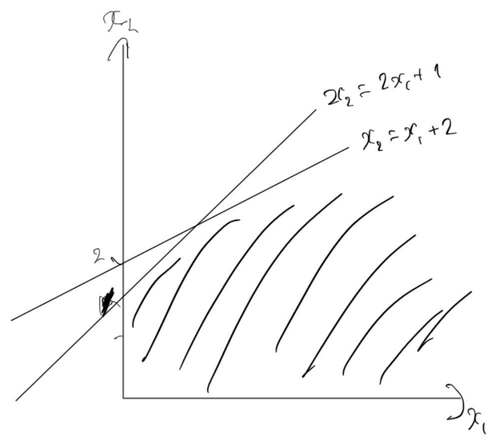
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En esta iteración, $x_B = (1,3)^T$ y los costes reducidos para las variables no básicas son $\hat{c}_N^T = (5, -3)$, indicando que la base actual no es óptima. Por tener coste reducido negativo, s_2 es la variable entrada, con columna entrada:

$$\hat{A}_{s_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde ambos valores son negativos, entonces no hay candidato para la prueba del ratio. El valor de la función objetivo se puede decrecer sin límite, y el problema no tiene mínimo finito.

Su gráfica:



La solución básica factible actual es $(x_1, x_2, s_1, s_2)^T = (1,3,0,0)^T$. Desde la ecuación $x_B = \hat{b} - \hat{A}_{s_2} s_2$ podemos decir que todos los puntos de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

son factibles. Sea $d = (1,1,0,1)^T$. Es fácil ver que $d \geq 0$ y que $Ad = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes en forma estándar.

Entonces, d es una dirección extrema de la región factible. $c^T d < 0$, entonces la función objetivo decrece cuando s_2 crece, demostrando que el problema es no acotado.

■

2.4 Punto Inicial

En los ejemplos anteriores, el método Simplex ha sido arrancado con una base inicial formada por las variables de holgura. Si una restricción no incluye una variable de holgura, esto no sería posible.

En estos casos, hay que usar un método para buscar la primera base factible, usando **variables artificiales**.

Consideremos el problema lineal

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

En forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 - e_1 = 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 + s_1 = 19 \\
& x_1, x_2, e_1, s_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Vemos que la primera restricción no contiene una variable de holgura. (También la variable e_1 no tomaría un valor positivo en la base).

Introducimos variables artificiales a_i a cada restricción que no contiene una variable de holgura s_j:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + a_1 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 - e_1 + a_2 = 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 + s_1 = 19 \\
& x_1, x_2, e_1, s_1, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ahora podemos formar la base $x_B = (a_1, a_2, s_1)^T$. Las variables artificiales no pertenecen al problema original, entonces esta base **no** corresponde a una solución básica factible.

Existen varios métodos que usan esta base para pasar a una base factible, donde las variables artificiales reducen a cero. Entonces, la solución sería factible en el problema original.

2.4.1 Método de M grande

En este método, la función objetivo está penalizado con el constante $M > 0$ grande y las variables artificiales: $z' = c^T x + M \sum a_i$.
En nuestro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + a_1 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 - e_1 + a_2 = 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 s_1 = 19 \\
& x_1, x_2, e_1, s_1, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La primera table del método de Simplex es:

Básica	x_1	x_2	e_1	s_1	a_1	a_2	Valor
$-z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
s_1	4	3	0	1	0	0	19

Ahora tenemos variables en la base inicial que aparecen en la función objetivo. Por lo tanto, tenemos que escribir el problema en términos de la base actual. El único cambio es la primera fila, donde $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ y $-\hat{z} = -c_B^T B^{-1} b$.

Básica	$\overset{\downarrow}{x_1}$	x_2	e_1	s_1	a_1	a_2	Valor
$-z'$	$-5M+2$	$2M+3$	M	0	0	0	$-16M$
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
s_1	4	3	0	1	0	0	19

Vemos que la variable no-básica x_1 va a entrar en la base, y a_2 va a salir. Una vez que una variable artificial haya salido de la base, la podemos eliminar del problema (ya que es igual a cero).

Básica	x_1	$\overset{\downarrow}{x_2}$	e_1	s_1	a_1	Valor
$-z'$	0	$-8M+7$	$-\frac{3}{2}M+1$	0	0	$-11M-2$
a_1	0	8	$\frac{3}{2}$	0	1	11
x_1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
s_1	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ahora x_2 entra en la base y s_1 sale.

Básica	x_1	x_2	$\overset{\downarrow}{e_1}$	s_1	a_1	Valor
$-z'$	0	0	$-\frac{M+6}{22}$	$\frac{8M-7}{11}$	0	$-\frac{M+127}{11}$
a_1	0	0	$\boxed{\frac{1}{22}}$	$-\frac{8}{11}$	1	$\frac{1}{11}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{41}{11}$
x_2	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{15}{11}$

Ahora e_1 entra en la base y a_1 sale, y está eliminada del problema. Siguiendo:

Básica	x_1	x_2	e_1	$\overset{\downarrow}{s_1}$	Valor
$-z'$	0	0	0	-5	-11
e_1	0	0	1	-16	2
x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	$\boxed{3}$	1

La base ya no incluye ninguna variable artificial, entonces es factible y la función objetiva es la original. Vemos que s_1 tiene coste reducido negativo, por lo tanto la base no es óptima. Seguimos:

Básica	x_1	x_2	e_1	s_1	Valor
$-z$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{28}{3}$
e_1	0	$\frac{16}{3}$	1	0	$\frac{22}{3}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$
s_2	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$

Esta base es óptima.

2.5 Problemas degenerados y terminación

El método de Simplex aplicado a problemas donde una variable básica toma valor cero en la base resultará en un ciclo infinito, sin parar. En cada iteración, la entrada de una variable no-básica en la base no cambia el valor de la función objetivo.

Si suponemos que x_t es la variable entrada y x_s es la variable salida, entonces las ecuaciones del método nos dan

$$\bar{x}_t = \frac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{s,t}} \qquad \bar{z} = \hat{z} + \hat{c}_t \bar{x}_t,$$

donde $\bar{z}$ es el nuevo valor de la función objetivo. En un problema degenerado, es posible que $\hat{b}_s = 0$, entonces tenemos $\bar{z} = \hat{z}$.

■ Ejemplo 2.4
Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Las bases sucesivas son:

Básica	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	Valor
$-z$	-1	-1	0	0	0
x_3	$\boxed{1}$	0	1	0	2
x_4	1	1	0	1	2

Básica	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	Valor
$-z$	0	-1	1	0	2
x_1	1	0	1	0	2
x_4	0	$\boxed{1}$	-1	1	0

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Valor
$-z$	0	0	0	1	2
x_1	1	0	1	0	2
x_2	0	1	-1	1	0

En la primera iteración, hay empate en la prueba del ratio para elegir la variable salida, y es por eso tenemos el problema degenerado. De todas formas, este problema degenerado ha terminado con base óptima $x_B = (x_1\ x_2)^T$ dando $z^* = -2$ y $x_B = (2\ 0)$.

■

Si un problema no es degenerado, entonces $\hat{b}_s > 0$ y $\hat{x}_t > 0$ y $\bar{z} < \hat{z}$. Podemos utilizar esto para demostrar que si nuestro problema no es degenerado, entonces el método de Simplex (normal) está garantizado a terminar.

Teorema 2.5.1 — Terminación finita - Caso de problema no degenerado.
Si se aplique el método de Simplex a un problema lineal donde en cada iteración todas las variables básicas son estrictamente positivas $x_B > 0$, entonces en una cantidad finita de iteraciones el método terminará o se determine que el problema es no acotado.

Demostración 2.1
pg 164
■

Terminación no está garantizado para problemas degenerados.

Definición 2.5.1 — Regla de Bland.
Suponemos que seguimos un orden de nombramiento de variables $x_1, x_2, \ldots$. Entonces en cada iteración del método de Simplex se elige la variable entrada como la primera variable de la lista que tiene coste reducido estrictamente negativo. Después, la variable salida es la primera de todas que da el mínimo en la prueba del ratio.

Es decir, la regla de Bland decide como romper empates.

■ **Ejemplo 2.5**

Consideremos el problema lineal

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \\
\text{s.a} \quad & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Eligiendo la base inicial $x_B = (s_1\ s_2\ s_3)$, tenemos la tabla inicial:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	0
s_1	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0
s_2	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0
s_3	0	0	1	0	0	0	1	1

Si aplicamos 6 iteraciones del método de Simplex normal, llegaremos a la misma solución, formando un bucle infinito. El método de Simplex no acabará.

Aplicamos la regla de Bland al problema, donde la primera diferencia se ve en la quinta iteración con tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	0
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
s_3	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	1

Según el método de Simplex normal, tendremos que coger s_1 como variable entrada y x_3 como variable salida. Si aplicamos la regla de Bland, vamos a elegir x_1 como variable entrada y s_3 como variable salida. Dando:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	36	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{125}$
x_3	0	0	1	0	0	0	1	1
x_4	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{250}$
x_1	1	-168	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{2}{125}$

La siguiente iteración es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z$	0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
x_3	0	0	1	0	0	0	1	1
s_1	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{300}$
x_1	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

Los costes reducidos son positivos, y por lo tanto la base es óptima. ■

Teorema 2.5.2 — Terminación con la regla de Bland.
Si el método de Simplex está implementado con la regla de Bland para elegir las variables de entrada y salida, entonces el método está garantizado a terminar.

2.6 Cotas Superiores

En problemas lineales es bastante común tener cotas superiores para las variables (e.g. cantidad máxima de un producto en un almacén). La forma hasta ahora para tener cotas superiores en cuenta ha sido de meterlos como restricciones nuevas.

El problema con este método es evidente en problemas con muchas restricciones y variables, donde cada cota superior dará una variable de holgura adicional al problema.

Otra forma de considerar cotas superiores es cambiar el método de Simplex para tenerlo en cuenta.

Estudiaremos el cambio al método de Simplex para problemas lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u, \end{aligned}$$

donde $u > 0$ finito.

Método de Simplex con Variables Acotadas

1. **Probar optimalidad:** Calcular los costes reducidos. Si todos son $(a)x_j = 0$ y $\hat{c}_N \geq 0$, o $(b)x_j = u_j$ y $\hat{c_N} \leq 0$, entonces la base actual es óptima. Si no, elige la variable entrada.

2. **Incrementar:** Calcular la columna entrada $\hat{A}_t = B^{-1}A_t$. Hallar el indice que corresponde al mínimo θ de las siguientes condiciones (si uno no está definido, debería tomar valor $+\infty$):

   a. rango de las cotas de la variable entrada $x_t : u_t$,

   b. Si $x_t = 0$,

$$min_{1\leq i\leq m}\{\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} \ : \ \hat{a}_{i,t} > 0\},$$
$$min_{1\leq i\leq m}\{\frac{\hat{u}_i - \hat{b}_i}{-\hat{a}_{i,t}} \ : \ \hat{a}_{i,t} < 0\}$$

   donde $\hat{u}_i$ es la cota superior de la variable básica i.

   c. Si $x_t = u_t$

$$min_{1\leq i\leq m}\{\frac{\hat{b}_i}{-\hat{a}_{i,t}} \ : \ \hat{a}_{i,t} < 0\},$$
$$min_{1\leq i\leq m}\{\frac{\hat{u}_i - \hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} \ : \ \hat{a}_{i,t} > 0\}$$

   donde $\hat{b}$ es el vector de los valores actuales de las variables básicas y $\hat{u}_i$ es la cota superior de la variable básica i.

3. **Actualizar:** Actualizar la matriz B y el vector de las variables básicas x_B. Si x_t es la variable entrada y salida, B no cambia.

Sea α la cantidad que cambia la variable entrada x_t, donde $\alpha = \theta$ si x_t era cero, y $\alpha = -\theta$ si x_t estaba en su cota superior. Entonces en términos de la base actual, actualizamos las variables según:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\hat{A}_t \\ e_t \end{pmatrix}.$$

La función objetivo decrecerá por $\hat{c}_t\alpha$, el nuevo valor de la variable entrada será $x_t + \alpha$ y las variables básicas tomarán valores $x_B = \hat{b} - \alpha\hat{A}_t$.

Ejemplo 2.6

Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ & -2x_1 - 4x_2 + x_4 = 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ & 0 \leq x_3 \leq 20 \\ & 0 \leq x_4 \leq 20. \end{aligned}$$

Utilizamos la base inicial $x_b = (x_3, x_4)^T$ con $x_N = (x_1, x_2)$, y fijamos las variables no básicas con valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Tenemos:

$$c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_N = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \; x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El valor actual de las variables básicas es:

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Empezamos la primera iteración del método de Simplex, calculando los costes reducidos:

$$\hat{c}_N^T = C_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-4\ 5) - (0\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = (-4\ 5)$$

En la prueba de optimalidad, vemos que x_1 tiene valor cero, y su coste reducido es negativo, entonces la base no es óptima. También, x_2 tiene valor de su cota superior, y su coste reducido es positivo, entonces tampoco cumple la condición de optimalidad.

Elegimos la variable x_2 como la variable entrada, por tener el coste reducido con valor absoluto más grande. Dando columna entrada:

$$\hat{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Pasamos a la fase de incrementar, y decidir la variable salida:

Tenemos la distancia entre las cotas de x_2 con valor $u_t = 3$.

$x_t = 3$ su cota, actualmente, entonces fijamos en $c.)$ del método. Tenemos el valor de $\hat{a}_{i,t}$ negativo para ambas variables básicas $(-2\ -4)$. Por lo tanto fijamos en:

$$min_{1 \leq i \leq m} \{ \frac{\hat{b}_i}{-\hat{a}_{i,t}} \ : \ \hat{a}_{i,t} < 0 \}$$

Dando $\frac{\hat{b}_1}{-\hat{a}_{1,2}} = \frac{12}{-(-2)} = 6$, y $\frac{\hat{b}_2}{-\hat{a}_{2,2}} = \frac{16}{-(-4)} = 4$.

Por lo tanto, el mínimo es $\theta = 3$, indicando que el valor de las variables básicas no llegan a cero, entonces no salen de la base. La variable x_2 es la variable salida también.

Actualizamos los valores, donde $\alpha = -3$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\hat{A}_t \\ e_t \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -(\hat{A}_2)_1 \\ -(\hat{A}_2)_2 \\ (e_2)_1 \\ (e_2)_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} -(-2) \\ -(-4) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dando solución $x_B^T = (6\ 4)$ y $x_N = (0\ 0)$, acabando la primera iteración.

Empezamos la segunda iteración calculando los costes reducidos $\hat{c}_N^T = (-4\ 5)$, que no han cambiado porque la base no ha cambiado.

Sin embargo, la variable no básica x_2 ya tiene valor cero, entonces cumple su condición de optimalidad. Solo queda $x_1 = 0$ con coste reducido negativo, indicando que las base no es óptima, dando x_1 como variable entrada con columna entrada:

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para incrementar las variables, miramos a las condiciones. El rango de las cotas de x_1 es $u_1 = 4$. Tenemos $x_1 = 0$, dando prueba de ratio para los componentes:

$$\frac{\hat{b}_1}{\hat{a}_{1,1}} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{\hat{u}_2 - \hat{b}_2}{-\hat{a}_{2,1}} = \frac{20-4}{2} = 8.$$

donde $\hat{u}_2 = u_4$ por ser indice de las variables básicas.

El mínimo de los valores es 2, por lo tanto x_3 es la variable salida, y $\alpha = 2$.

Actualizamos: La base nueva es $x_B^T = (x_1\ x_4)$ y $x_N^T = (x_2\ x_3)$, con:

$$c_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_N = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dando $x_B^T = (2\ 8)$. Empezando la tercera iteración, calculamos los costes reducidos $\hat{c}_N^T = (\frac{7}{3}\ \ \frac{4}{3})$ y vemos que ambas variables no básicas son ceros, por lo tanto cumple la condición de optimalidad y la base actual es óptima con valor $z = c^T x = -8$ y $x = (2\ \ 0\ \ 0\ \ 8)^T$. ■

2.7 Problemas

1. Consideremos el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 8x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolver el problema con la base que corresponde al punto $x = (0,0)^T$. Representar gráficamente el progreso del algoritmo.

2. Resuelve los siguientes problemas con Simplex

a.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 38 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 55 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Resuelve los siguientes problemas con Simplex, dibujando la región factible.

a.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a} \quad & -5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Hallar todos los valores de a para que el siguiente problema lineal tenga óptimo finito.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -ax_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

5. Resolver el siguiente problema lineal, utilizando el método de M grande para hallar la base inicial.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

6. Resolver el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Resolver el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{s.a} \quad & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \leq 0 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

8. Resolver los siguientes problemas de optimización lineal con el método de Simplex con variables acotadas (use las variables de holgura como base inicial)

a.)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -5x_1 - 10x_2 - 15x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 20. \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 8. \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 6x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq 15. \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = -5x_1 - 7x_2 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq 20. \end{aligned}$$

Tema 3 - Dualidad y Sensibilidad

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1section.1.2subsection.

chapter.4section.4.1subsection.4.1.1subsection.4.1.2subsection.4

3. Dualidad y Sensibilidad

3.1 Dualidad

Cada programa lineal tiene un problema asociado llamado el dual, donde el rol de las variables y las restricciones es al revés.

Es decir, por cada variable en el problema primal, hay una restricción en el dual, y por cada restricción en el primal, hay una variable en el dual.

Dos usos de teoría de dualidad:

1.) Investigar el efecto de cambios en las restricciones en el valor de la función objetivo,

2.) El dual de un problema puede mejorar métodos de resolución de problemas lineales.

Definición 3.1.1 — canónica de dualidad.
Consideremos el problema lineal en forma canónica

$$
\begin{array}{llr}
(P) & \text{minimizar} & c^T x \\
 & \text{s.a} & Ax \leq b \\
 & & x \geq 0 \\
 & & x \in \mathbb{R}^n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llr}
(D) & \text{maximizar} & w^T b \\
 & \text{s.a} & A^T w \leq c^T \\
 & & w \geq 0 \\
 & & w \in \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

■ **Ejemplo 3.1**
Consideramos el problema lineal en forma canónica:

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\
\text{s.a} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\
 & 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 18 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Entonces su dual es:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 10w_1 + 18w_2 \\ \text{s.a} \quad & 4w_1 + 8w_2 \geq 6 \\ & 3w_1 + w_2 \geq 2 \\ & -2w_1 + 2w_2 \geq -1 \\ & 2w_1 + 4w_2 \geq 2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

■

Definición 3.1.2 — estándar de dualidad.
Consideremos el problema lineal en forma estándar

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad\qquad (D) \quad \begin{aligned} \text{maximizar} \quad & w^T b \\ \text{s.a} \quad & A^T w \leq c^T \\ & w \text{ irrestringuido} \\ & w \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Lema 3.1.1
El dual del dual es el primal.

Demostración 3.1
Consideramos el problema lineal en forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(cualquier problema se puede expresar en forma canónica). Su dual es:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & w^T b \\ \text{s.a} \quad & A^T w \geq c^T \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -w^T b \\ \text{s.a} \quad & -A^T w \leq -c^T \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

cuyo dual es

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & -c^T x \\ \text{s.a} \quad & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual es igual a

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

■

Para problemas donde se mezclan distintos tipos de restricciones,

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ & \text{s.a} & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ & & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq b_2 \\ & & A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ s.r.} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D) & \text{maximizar} & w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3 \\ & \text{s.a} & w_1A_{11} + w_2A_{21} + w_3A_{31} \leq c_1 \\ & & w_1A_{12} + w_2A_{22} + w_3A_{32} \geq c_2 \\ & & w_1A_{13} + w_2A_{23} + w_3A_{33} = c_3 \\ & & w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \text{ s.r.} \end{array}$$

	Min	Max	
Variables	$\begin{pmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{s.r.} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix}$	Restricciones
Restricciones	$\begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{s.r.} \end{pmatrix}$	Variables

3.1.1 Teoremas

Teorema 3.1.1 — de dualidad débil.
Si x y w son soluciones factibles de (P) y (W) respectivamente, entonces $z = c^T x \geq w^T b = y$.

Demostración 3.2
Si en el problema dual $c \geq A^T w$, entonces $c^T \geq w^T A$. Tenemos $x \geq 0$, entonces

$$z = c^T x \geq w^T Ax = w^T b = b^T w = y$$

■

■ **Ejemplo 3.2**
Podemos comprobar el teorema de dualidad débil en un problema lineal. Consideremos el problema:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & z = 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ & \text{s.a.} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 10 \\ & & 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 18 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) & \max & y = 10w_1 + 18w_2 \\ & \text{s.a} & 4w_1 + 8w_2 \leq 6 \\ & & 3w_1 + w_2 \leq 2 \\ & & -2w_1 + 2w_2 \leq -1 \\ & & 2w_1 + 4w_2 \leq 2 \\ & & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Podemos comprobar el teorema de dualidad débil para los puntos factibles $x = (4,0,0,0)^T, w = (\frac{1}{2},0)^T$. (fácil de comprobar)
Miramos los valores en los funciones objetivos: $c^T x = 24, b^T w = 5$. Entonces tenemos que

$z = c^T x \geq b^T w = y.$ ■

Corolario 3.1.1
Si un problema es ilimitado, entonces el otro es infactible.

■ **Ejemplo 3.3**
Consideremos el problema primal

$$\begin{aligned} (P) \quad \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vemos que este primal es ilimitado, y su dual es infactible.

Para demostrar que el problema es ilimitado, buscamos una dirección de la región factible. i.e. $\lambda > 0, x \in S, \exists\, d \ : \ x + \lambda d \in S$, y demostramos que la función objetivo crece en esa dirección (maximizando).

Probamos en la dirección $d = (0,1)$, con el punto factible $(0,0)$. $x + \lambda d = (0,0) + \lambda(0,1) = (0,\lambda)$. Es esto factible?

En la restricción $x_1 - x_2 \leq 1$, tenemos $-\lambda \leq 1$, con $\lambda \geq 0$, entonces es factible por todo λ. Por lo tanto, $d = (0,1)$ es una dirección de la región factible, y no es acotado cuando $x_2 \to \infty$. Entonces, la función objetivo crece hasta infinito, el problema es ilimitado.

El dual del problema es

$$\begin{aligned} \min \quad & y = w_1 \\ \text{s.a} \quad & w_1 \geq 1 \\ & -w_1 \geq 1 \\ & w_1 \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual es infactible.
■

También es posible tener ambos problemas infactibles.

■ **Ejemplo 3.4** Vemos que el siguiente problema primal y su dual asociado son infactibles.

$$\begin{aligned} (P) \quad \max \quad & z = 2x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 - x_2 \geq 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (D) \quad \min \quad & y = w_1 + w_2 \\ \text{s.a} \quad & w_1 - w_2 = 2 \\ & w_1 - w_2 = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ infactible $\qquad \Rightarrow$ infactible
■

Corolario 3.1.2
Si x es una solución factible de (P), y es una solución factible de (D) y $c^T x = b^T y$, entonces x y y son óptimos para sus problemas respectivamente.

Teorema 3.1.2 — fundamental de dualidad lineal.
Con respeto a los problemas primal (P) y dual (D), una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

a. (P) y (D) tienen solución óptima finita, x^* y w^*, entonces $c^T x^* = (w^*)^T b$.
b. Uno es ilimitado y el otro es infactible.
c. Los dos son infactibles.

■ **Ejemplo 3.5**
Vemos los casos del teorema fundamental, dibujando la región factible de ambos problemas

(1) (P) región factible no vacía y solución acotada y (D) región factible no vacía y solución acotada

$$\begin{array}{llrrl} (P) & \text{mín} & 4x_1 & +2x_2 & \\ & sa: & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrrl} (D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\ & sa: & u_1 & +u_2 & \leq 4 \\ & & u_1 & -u_2 & \leq 2 \\ & & u_1, & u_2 & \geq 0 \end{array}$$

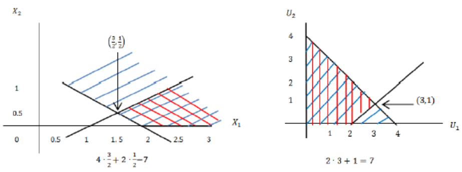


Figura 6.1: Primal y dual factibles acotados

(2) (P) región factible no vacía y solución ilimitada y (D) infactible

$$\begin{array}{llrrl} (P) & \text{mín} & -4x_1 & +2x_2 & \\ & sa: & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & -x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrrl} (D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\ & sa: & -u_1 & -u_2 & \leq -4 \\ & & u_1 & +u_2 & \leq 2 \\ & & u_1, & u_2 & \geq 0 \end{array}$$

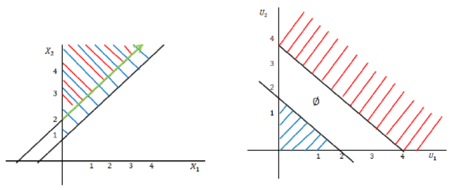
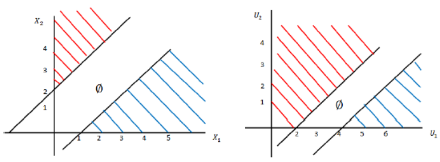


Figura 6.2: Primal factible ilimitado y dual infactible

(3) (P) infactible y (D) infactible

$$\begin{array}{llrrl} (P) & \text{mín} & -4x_1 & +2x_2 & \\ & sa: & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrrl} (D) & \text{máx} & 2u_1 & +u_2 & \\ & sa: & -u_1 & +u_2 & \leq -4 \\ & & u_1 & -u_2 & \leq 2 \\ & & u_1, & u_2 & \geq 0 \end{array}$$



■

Teorema 3.1.3 — de dualidad fuerte. Sea un problema primal (P) y su problema dual correspondiente (D). Si uno de los problemas tiene solución óptima, entonces el otro también tiene, y los valores óptimos de las funciones objetivos son iguales.

La demonstración del teorema de dualidad fuerte nos da la solución óptima del problema dual. Si x^* está escrito de la forma $x^* = \binom{x_B}{x_N}$, entonces los valores óptimos de las variables dual son:

$$y^* = B^{-T} c_B.$$

si el problema tiene una variable de holgura para cada restricción.... para anclar con lo de holgura complementaria

■ **Ejemplo 3.6**

Consideremos un ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

con solución óptima:

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z'$	0	0	0	1	2	13
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	0	0	1	3
s_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

con base $x_B = (x_2, x_1, s_1)$ con matriz de coeficientes $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La solución óptima del problema dual es

$$(y^*)^T = c_B B^{-1} = (-2 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad -2)$$

Estos valores corresponden al negativo de los costes reducidos de las variables de holgura. La función objetivo dual es

$$\max \quad w = 2y_1 + 7y_2 + 3y_3$$

Entonces el valor óptimo es $w^* = -13 = z^*$. (podríamos verificar las restricciones del dual también) ■

3.2 Holgura Complementaria

Hay una interdependencia entre los problemas primal y dual que tienen soluciones óptimas. Donde las restricciones de positividad de las variables en el primal $(x \geq 0)$ está relacionado con las restricciones en el dual $(A^T y \leq c)$, y las restricciones en el primal $(Ax \leq b)$ con las variables del dual $(y \geq 0)$.

Teorema 3.2.1 — de holgura complementaria.
Consideremos un problema primal y su dual, donde el promal está escrito en forma estándar. Si x^* es solución factible para el problema primal y w^* solución factible para el dual, son óptimas si y solo si:

1.
$$(x^*)^T(c - A^T w^*) = 0$$

2.
$$(w^*)^T(Ax^* - b) = 0$$

■ **Ejemplo 3.7**
Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es $x^* = (3,5,3,0,0)^T$, dando solución del dual $y = (y_1, y_2, y_3)^T = (0,-1,-2)^T$. Las restricciones del dual son:

$$\begin{aligned} -2y_1 - y_2 + y_3 &\leq -1 \\ y_1 + 2y_2 &\leq -2 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

En el primal, las restricciones de no negatividad de las variables x_4 y x_5 son estrictas. En el dual, las primeras tres restricciones son estrictas. Esto satisface el teorema de holgura complementaria. ■

■ **Ejemplo 3.8**

Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x + 6y \\ \text{s.a.} \quad & 2x + 4y \leq 12 \\ & 4x + 3y \leq 16 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

con solución óptima $x^* = \frac{14}{5}$ y $y^* = \frac{8}{5}$, dando el valor óptimo de la función objetivo $z = 20.8$. El problema dual es:

$$\begin{aligned} \min \quad & 12w + 16v \\ \text{s.a.} \quad & 2w + 4v \geq 4 \\ & 4w + 3v \geq 6 \\ & w, v \geq 0 \end{aligned}$$

El teorema de holgura complementaria nos permite plantear las siguientes ecuaciones:

$$(2x+4y-12)w=0$$
$$(4x+3y-16)v=0$$
$$(2w+4v-4)x=0$$
$$(4w+3v-6)y=0$$

Como sabemos que $x^* = \frac{14}{5}, y^* = \frac{8}{5}$, las últimas dos ecuaciones nos dan $w^* = \frac{6}{5}$ y $v = \frac{2}{5}$ con valor objetivo del dual 20.8. ■

3.3 Interpretación

El problema dual se puede utilizar para entender mejor el modelo en su aplicación. Lo vamos a investigar a través de un ejemplo:

Consideremos un panadero que vende dos tipos de pan, uno simple y uno elaborado. Ambos tipos requieren ingredientes básicos (harina, sal, agua etc), ademas de ingredientes más caros (fruta, especias etc). Los panes elaborados usan más ingredientes caros que los panes simples. También hay costes de labor más altos para los panes elaborados. El panadero quiere maximizar sus beneficios. El problema podría tener la forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 24x_1 + 14x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí x_1 y x_2 representan la cantidad de pan elaborado y pan simple producido en un día. La función objetivo representa el beneficio total, las primeras dos restricciones representan los límites de los ingredientes básicos y caros respectivamente. La tercer restricción representa el limite de labor posible en un día, donde el pan simple tarda una hora y el pan elaborado tarda 2 horas en producirse.

El problema dual sería:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 120y_1 + 100y_2 + 70y_3 \\ \text{s.a} \quad & 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 24 \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 14 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima al problema primal es $z^* = 888$, $x_1^* = 16$ y $x_2^* = 36$. La solución óptima del problema dual es $w^* = 888$, $y_1^* = 6.4$, $y_2^* = 1.2$ y $y_3^* = 0$.

En este problema los factores limitantes son los ingredientes básicos y caros. Hay dos horas de labor sin usar ($2x_1 + x_2 = 68$). El panadero podría comprar más ingredientes, pero, ¿cuánto debería pagar?.

La función objetivo del dual nos dice que un kilo más de ingredientes básicos valdría $y_1 = 6.4$ euros en beneficios., y un kilo más de ingredientes caros valdría $y_2 = 1.2$ euros de beneficios. **Las variables duales representan los valores marginales de las variables**. Más labor no cambiaría los beneficios porque $y_3 = 0$ (aunque si produce más pan, las dos horas extras podrían ser insuficientes, y habrá que estudiar el problema más).

Hay otra interpretación del dual. Suponemos que alguien quiere comprar la panadería, ¿qué precio debería ofrecer?

La persona interesada en comprar la panadería quiere minimizar el precio que ofrece, pensando en el valor del inventario del panadero (ingredientes básicos y caros y labor), que llamaremos y_1, y_2 y y_3 respectivamente.

$$\min \quad w = 120y_1 + 100y_2 + 70y_3$$

Esto sería justo para el panadero, si el precio ofrecido es al menos igual al beneficio que podría conseguir vendiendo pan, es decir:

$$\begin{aligned} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 24 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &\geq 14 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son las restricciones y función objetivo del problema dual. El problema dual nos deja determinar el valor de la panadería.

3.4 Análisis de Sensibilidad

3.4.1 Cambios en la función objetivo

Supongamos que tenemos el problema inicial z^0 y problema modificado z^Δ:

$$\begin{array}{lll} z^0 & \min & c^T x \\ & \text{s.a} & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} z^\Delta & \min & (c^T + \Delta d^T)x \\ & \text{s.a} & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

con $d \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que B es la matriz de coeficientes de la base óptima del problema z^0 con solución $x_B^0 = B^{-1}b$ y $x_N^0 = 0$.

¿Para qué valores de Δ sigue siendo x_B^0 la solución óptima si variamos d? Tenemos que comprobar para que valores de Δ sería la solución **factible** y **óptima**.

1. **Factibilidad:** $x^\Delta = [\binom{B^{-1}b}{0}] \geq 0$. El valor de Δ no cambia la condición de factibilidad, entonces sigue siendo factible por cualquier valor de Δ.

2. **Optimalidad:** Costes reducidos:

$$\begin{aligned} \hat{c}_N^\Delta = c_N^T - z &= (c_N^T + \Delta d_N^T) - (c_B^T + \Delta d_B^T)B^{-1}N \\ &= c_N^T - c_B^T B^{-1}N + \Delta(d_N^T - d_B^T B^{-1}N) \end{aligned}$$

Si $c_N^0 = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ y $d_N^0 = d_N^T - d_B^T B^{-1}N$, tenemos optimalidad si $c_N^0 + \Delta d_N^0 \geq 0$.

$c_N^0 + \Delta d_N^0 \geq 0$ si y solo si:

2.1. si $x_i \in N, d_i^0 > 0: \; c_i^0 + \Delta d_i^0 \geq 0 \;\rightarrow\; \Delta \geq -\dfrac{c_i^0}{d_i^0}$.

2.2. si $x_i \in N, d_i^0 < 0: \; c_i^0 + \Delta d_i^0 \geq 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{c_i^0}{d_i^0} \geq \Delta$.

por lo tanto, hay optimalidad si y solo si:

$$max\{-\frac{c_i^0}{d_i^0} \ : \ d_N^0 > 0, \ \forall\, i \in \ N\} \leq \Delta \leq min\{-\frac{c_i^0}{d_i^0} \ : \ d_N^0 < 0 \ , \ \forall\, i \in \ N\}$$

■ **Ejemplo 3.9**
Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

cuya base óptima es $x_B = (x_1, x_2, x_4) = (\frac{11}{4}, \frac{9}{4}, \frac{1}{2})$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Hagamos el análisis de sensibilidad del problema cuando la función objetivo se modifica mediante el vector $d^T = (0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0)$:

Los costes reducidos del problema modificado son:

$$\begin{aligned} c_N^\Delta &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N + \Delta(d_N^T - d_B^T B^{-1} N) \\ &= (0 \ \ 0) - (-2 \ \ -1 \ \ 0) B^{-1} N + \Delta((0 \ \ 0) - (0 \ \ 1 \ \ 0) B^{-1} N) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\Delta \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Delta) \end{aligned}$$

como $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\Delta \geq 0$ si $\Delta \leq \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Delta \geq 0$ si $\Delta \geq -1$, tenemos que la solución sigue siendo óptima si $\Delta \in [-1, \frac{1}{3}]$.

■

3.4.2 Cambios en los coeficientes independientes

Supongamos que tenemos el problema inicial z^0 y problema modificado z^Δ:

$$\begin{aligned} z^0 \quad \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} z^\Delta \quad \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b + \Delta g \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $g \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que B es la matriz de coeficientes de la base óptima del problema z^0 con solución $x_B^0 = B^{-1} b$ y $x_N^0 = 0$.

Según un cambio Δ, miramos si la solución sigue siendo óptima:

1. **Factibilidad:** $x_B^\Delta = B^{-1}(b + \Delta g) = \hat{b} + \Delta \hat{g}$, donde $\hat{g} = B^{-1} g$. Solución factible si $\hat{b} + \Delta \hat{g} \geq 0$:
   1.1 si $\hat{g}_i > 0 \ : \ \hat{b} + \Delta \hat{g} \geq 0 \ \ \rightarrow \ \ \Delta \geq -\frac{\hat{b}_i}{\hat{g}_i}$
   1.2 si $\hat{g}_i < 0 \ : \ \hat{b} + \Delta \hat{g} \geq 0 \ \ \rightarrow \ \ \Delta \leq -\frac{\hat{b}_i}{\hat{g}_i}$
2. **Optimalidad:** Los costes reducidos no dependen de Δ, entonces siguen positivos.

Por lo tanto, la base sigue siendo óptima si y solo si:

$$max\left\{-\frac{\hat{b}_i}{\hat{g}_i} \,:\, \hat{g}_i > 0\right\} \quad \leq \Delta \leq \quad min\left\{-\frac{\hat{b}_i}{\hat{g}_i} \,:\, \hat{g}_i < 0\right\}$$

■ **Ejemplo 3.10**
Consideremos el ejemplo anterior, analizando la sensibilidad del problema cuando los coeficientes independientes se modifican por el vector $g = (0 \;\; 0 \;\; 1)$.

$$B^{-1}(b+\Delta g) = B^{-1}\left(\begin{pmatrix}5\\0\\21\end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\\frac{9}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Para tener $B^{-1}(b+\Delta g) \geq 0$, tenemos $\Delta \geq -11, \Delta \leq 9, \Delta \geq -1$.
Por lo tanto la solución sigue siendo óptima si $\Delta \in [-1, 9]$. ■

3.4.3 Añadir una variable

Supongamos que tenemos el problema inicial z^0 y problema modificado z^Δ:

$$\begin{array}{lll} z^0 & \min & c^T x \\ & \text{s.a} & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} z^\Delta & \min & [c^T \;\; c_\Delta]\begin{bmatrix}x\\x_\Delta\end{bmatrix} \\ & \text{s.a} & [A \;\; a_\Delta]\begin{bmatrix}x\\x_\Delta\end{bmatrix} = b \\ & & x \geq 0, x_\Delta \geq 0. \end{array}$$

donde x_Δ es una variable nueva, c_Δ es su coeficiente en la función objetivo y a_Δ es la columna de coeficientes en el sistema de restricciones que corresponde a la nueva variable.

Si B es una base óptima para z^0, ¿es dicha base óptima en z^Δ?

1. **Factibilidad:** $B^{-1}b \geq 0$, por tanto factible en z^Δ.
2. **Optimalidad:** Costes reducidos de z^Δ:

$$\begin{aligned} \hat{c}_N^T &= [c_N^T \quad c_\Delta] - c_B^T B^{-1}[N \quad a_\Delta] \\ &= [c_N^T \quad c_\Delta] - c_B^T B^{-1} N - c_B^T B^{-1} a_\Delta \\ &= [c_N^T - c_B^T B^{-1} N \quad c_\Delta - c_B^T B^{-1} a_\Delta] \end{aligned}$$

como $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ por ser B base óptima en z^0, B es óptima en z^Δ si y solo si $c_\Delta - c_B^T B^{-1} a_\Delta$.

■ **Ejemplo 3.11**
Consideremos el problema lineal

$$\begin{array}{rr} \min & -20x_1 - 16x_2 - 12x_3 \\ & \text{s.a.} \quad x_1 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1600 \\ & x_1, x_2, x_3 \end{array}$$

con base óptima $x_B = (x_2, x_3, s_1) = (600, 400, 400)$ y solución $z^* = -14400$. La tabla correspondiente de Simplex es:

Básica	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z'$	4	0	0	0	8	4	14400
x_2	2	0	1	0	2	-1	400
x_3	0	1	0	0	-1	1	600
s_1	1	0	0	1	0	0	400

Si añadimos una nueva variable x_4, con $c_4 = -10$ y $a_4^T = (1 \;\; 0 \;\; 1)$, vemos si la base sigue siendo óptima:

$$\begin{aligned} c_4 - c_B^T B^{-1} a_\Delta &= -10 - (-16 \;\; -12 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -6. \end{aligned}$$

≤ 0, por lo tanto la base no sigue siendo óptima.

Si añadimos la columna de x_4 a la tabla de Simplex, donde $B^{-1}N = B^{-1}a_4$ para esta variable, tenemos (calculado antes):

Básica	x_1	x_2	x_3	$\overset{\downarrow}{x_4}$	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z'$	4	0	0	-6	0	8	4	14400
x_2	2	0	1	-1	0	2	-1	400
x_3	0	1	0	1	0	-1	1	600
s_1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0	400

seguimos con otra iteración del método de Simplex, dando nueva tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Valor
$-z'$	10	0	0	0	6	8	4	16800
x_2	3	0	1	0	1	2	-1	800
x_3	-1	1	0	0	-1	-1	1	200
x_4	1	0	0	1	1	0	0	400

con base óptima $x_B = (x_2, x_3, x_4) = (800, 200, 400)$ y $z^* = -16800$. La variable nueva ha mejorado la solución. ■

3.4.4 Añadir una restricción

3.4.5 Precios Sombra?

3.5 Simplex Dual

Es común, especialmente en el análisis de sensibilidad, llegar a una solución básica que no es factible. Es decir, $c_N^T \geq 0$ con $B^{-1}b < 0$. Aunque la base en esta situación no es factible para el primal, la es para el dual. En situaciones de este estilo, podemos utilizar la tabla de Simplex del problema primal para resolver el dual, utilizando la siguiente modificación del método.

Si miramos otra vez a las tablas de Simplex, vemos que lo que nosotros utilizamos como base inicial es la de la derecha, con la matriz B siendo identidad. Esto ocurre en un punto extremo, por ejemplo cuando la base está formada por variables de holgura. Así tenemos en la última columna el valor del punto extremo.

Problema lineal original - formato table

básica	x_B	x_N	valor
$-z$	c_B^T	c_N^T	0
x_B	B	N	b

Problema lineal base actual

básica	x_B	x_N	valor
$-z$	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}N$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Puede resultar que el punto extremo no es factible para el problema. Este aparece cuando $B^{-1}b < 0$.

un resumen de como sacar el dual solución/problema desde el Simplex del primal.

3.5.1 Algoritmo Dual del Simplex

1. **Paso 0 -** Empezamos desde una solución básica primal / solución básica factible dual.

2. **Paso 1 - Prueba de factibilidad:** Si $B^{-1}b \geq 0$ **ÓPTIMO**. Si no, elige $(x_B)_s$ como variable salida, donde $\hat{b}_s < 0$.

3. **Paso 2 - Calcular:** Calcular $y_{sj} = e_s^T B^{-1} a^j,\ j \in NB, s-sima$ fila de $B^{-1}N$.

   – Si $y_{sj} \geq 0\ \forall j$, **PRIMAL INFACTIBLE, DUAL NO ACOTADO.**
   – En caso contrario, elegir columna t tal que

   $$|\frac{\hat{c}_t^T}{\hat{a}_{s,t}}| = min\left\{|\frac{\hat{c}_j^T}{\hat{a}_{s,j}}| \mid \hat{a}_{s,j} < 0, x_j \in NB\right\}$$

   donde x_t es la variable entrada, y $\hat{a}_{s,t}$ es el elemento pivote.

4. **Paso 3 - Actualizar:** Cambiar columna t a e_t con operaciones de filas.

■ **Ejemplo 3.12**
Consideremos el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Podríamos resolver el problema usando variables artificiales. Si no lo hacemos, tenemos la tabla inicial

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	2	3	0	0	0
	3	-2	-1	0	4
	1	2	0	-1	3

Consideramos la base inicial $x_B = (e_1, e_2)$ (por lo tanto, buscamos I en sus columnas) multiplicando las restricciones por -1.

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	2	3	0	0	0
e_1	-3	2	1	0	-4
e_2	-1	-2	0	1	-3

Esta base es primal infactible ($B^{-1}b < 0$) pero dual factible $\hat{c}_N^T \geq 0$. En esta base, las variables dual son $y^T = c_B^T B^{-1} = (0\ 0)$ con $w = 0$.

Aplicamos el método dual, desde la base dual factible.

Itr 1:

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	2	3	0	0	0
e_1	$\boxed{-3}$	2	1	0	$-4 \Leftarrow$
e_2	-1	-2	0	1	-3

Paso 1: Optimalidad
Tenemos $B^{-1}b < 0$, entonces la base no es óptima. e_1 tiene el valor más grande absolutamente, entonces e_1 sale de la base.
Paso 2: Calcular
Para la prueba del ratio, solo un valor es negativo en la fila de e_1. Por lo tanto, x_1 entra en la base.

Paso 3: Actualizar
$F_1 + \frac{2}{3}F_2,\ F_3 - \frac{1}{3}F_2,\ \frac{-1}{3}F_2.$

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-8}{3}$
x_1	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
e_2	0	$\frac{-8}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{-5}{3}$

Itr 2:

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-8}{3}$
x_1	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
e_2	0	$\boxed{\frac{-8}{3}}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{-5}{3} \Leftarrow$

Paso 1: Optimalidad
$B^{-1}b < 0$ Base no óptima, e_2 sale de la base.
Paso 2: Calcular
Tenemos $|\frac{\frac{13}{3}}{\frac{-8}{3}}| = \frac{13}{8}$ y $|\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}}| = 2$. Entonces x_2 entra en la base.

Paso 3: Actualizar
$F_1 + \frac{\frac{13}{3}}{\frac{2}{3}}F_2,\ F_3 - \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}F_2,\ F_2/\frac{-2}{3}.$

Básica	x_1	x_2	e_1	e_2	Valor
$-z$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{-43}{8}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_2	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{5}{8}$

Tenemos $B^{-1}b \geq 0$, entonces la base actual es óptima, con solución dual $y_1 = \frac{1}{8}$, $y_2 = \frac{13}{8}$, $w^* = \frac{43}{8}$.
■

3.6 Problemas

1. Hallar el dual de

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 9x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 5 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ & 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Hallar el dual de

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geq 23 \\ & 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0. \end{aligned}$$

   Verificar que el dual del dual es el primal.

3. Considerar el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   Hallar el dual del problema. Resolver el primal y dual gráficamente, y verificar que los resultados cumplen el teorema de dualidad fuerte. Verificar que el óptimo dual satisface $y^T = c_B^T B^{-1}$.

4. Utilizar dualidad, eliminación de variables y resolución gráfica para resolver el siguiente problema (sin usar el método de Simplex).

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad & -3x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - x_2 \geq -3 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

5. Resolver el siguiente problema con el método de Simplex Dual

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 - 5x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

6. Considerar el problema lineal

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 15 \\ 2x_2 + 3x_3 &\leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

con base óptima $x_B = (x_1, x_2, x_3)$.
 a. ¿Cuál es la solución del problema? ¿Cuales son los valores óptimos de las variables duales?
 b. Si reducimos la constante b de la segunda restricción por 5, ¿cuál es la solución del problema ahora?
 c. ¿Por cuánto se puede cambiar el valor de b en la primera restricción sin cambiar la base óptima?
 d. Si incrementamos el coeficiente de x_2 en la función objetivo a 15, ¿cuál es la solución del problema ahora?
 e. ¿Por cuánto se puede cambiar el coeficiente de x_1 en la función objetivo sin cambiar la base óptima?

7. The Gotham City Police Department employs 30 police officers. Each officer works 5 days per week. The crime rate fluctuates with the day of the week, so the number of police officers required each day depends on which day of the week it is: Saturday, 28; Sunday, 18; Monday, 18; Tuesday, 24; Wednesday, 25; Thursday, 16; Friday, 21. The police department wants to schedule police officers to minimize the number whose days off are not consecutive. Formulate an LP that will accomplish this goal. (Hint: Have a constraint for each day of the week that ensures that the proper number of officers are not working on the given day.)

8. Alexis Cornby makes her living buying and selling corn. On January 1, she has 50 tons of corn and \$1,000. On the first day of each month Alexis can buy corn at the following prices per ton: January, \$300; February, \$350; March, \$400; April, \$500. On the last day of each month, Alexis can sell corn at the following prices per ton: January, \$250; February, \$400; March, \$350; April, \$550. Alexis stores her corn in a warehouse that can hold at most 100 tons of corn. She must be able to pay cash for all corn at the time of purchase. Use linear programming to determine how Alexis can maximize her cash on hand at the end of April.

9. Se procesan cuatro productos en dos máquinas de manera sucesiva. Los tiempos de fabricación, en horas, por cada unidad de producto, en cada una de las máquinas, se indican a continuación:

	Tiempo por unidad (horas)				2$*$**Coste hora**
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**	**Producto 3**	**Producto 4**	
1	2	3	4	2	6
2	3	2	1	2	9

Las horas totales presupuestadas para todos los productos en las máquinas 1 y 2 son 500 y 380. Si el precio de venta por unidad para los productos 1, 2, 3 y 4 es de 45, 40, 35 y 32 euros respectivamente, formular el modelo de optimización para determinar el beneficio neto total. Contestar a las siguientes preguntas:

a. Resolver el problema.
b. Formular y resolver el problema dual.
c. Comprobar que la solución del problema dual sale desde el primal, por teoría.
d. Analizar las soluciones óptimas, con holgura complementaria, pensando en como podríamos cambiar la solución.
d. Interpretar económicamente el problema dual. Esto es, ¿qué representan las variables duales? ¿y la función objetivo? ¿y las restricciones?

IV

Tema 4 - Programación Lineal Entera

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1section.1.2subsection.

chapter.5section.5.1subsection.5.1.1subsection.5.1.2subsection.

4. Programación Lineal Entera

4.1 Introducción

Introducción general, con motivación. En que tipos de problemas podemos encontrar estos modelos. Formulaciones básicas, relacionadas a Tema1/2 si posible. Que problemas pueden provocar en la resolución.
algo sobre problemas discretos? hazlo como en general? cual es la diferencia

Definición 4.1.1
Podemos agrupar muchos problemas reales de optimización lineal entera en tres grupos:

- Los modelos de programación entera **mixta** son aquellos en los que algunas variables toman valores enteros y otras valores continuas.
- Los modelos de programación **entera** son aquellos en los que todas las variables toman valores enteros.
- Los modelos de programación entera **binaria** son aquellos en los que todas las variable tienen valores 0 o 1.

■ **Ejemplo 4.1**
El problema de la mochila.

Una mochila con capacidad de $12kg$ se quiere llenar con objetos de peso y valor fijado. En la siguiente tabla se da el peso y el valor de cada uno de los cuatro objetos.

	1	2	3	4
Peso (kg)	3	6	5	5
Valor (euros)	15	25	12	10

Se debe elegir qué objetos se meten en la mochila para maximizar su valor. Para plantear un modelo lineal se definen las siguiente variables de decisión:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } j \text{ es seleccionado} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

El modelo lineal es

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ o } 1
\end{aligned}
$$

■

Definición 4.1.2
Al problema de programación lineal que se obtiene al omitir las restricciones de integridad de un problema entero se le llama **problea entero relajado**.

Problema entero

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0 \text{ y entero}
\end{aligned}
$$

Problema relajado

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Proposition 4.1.1
La región factible del problema entero relajado contiene a la región factible del problema entero.

Corolario 4.1.1
El óptimo del problema entero relajado obtiene mejor valor en la función objetivo que el óptimo del problema entero.

Definición 4.1.3
Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$ se dice **entero** si todos sus puntos extremos son enteros.

Sea el problema lineal (PL): $z_{PL}(c) = min\{c^T x \ : \ x \in P\}$.

Proposition 4.1.2
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. P es entero,
2. (PL) tiene una solución óptima entera $\forall \ c \ \in \mathbb{R}^n$ tal que $z_{PL}(c) > -\infty$,
3. (PL) tiene una solución óptima entera $\forall \ c \ \in \mathbb{Z}^n$ tal que $z_{PL}(c) > -\infty$,
4. $z_{PL}(c) \in \mathbb{Z}^n$ para todo $c \in \mathbb{Z}^n$ para el cual (PL) tiene solución óptima finita.

Definición 4.1.4
Una matriz entera $A \in M^{m \times n}$ es **totalmente unimodular (TU)** se el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A es igual a $0, 1, -1$.

Corolario 4.1.2
Si A es TU entonces $a_{ij} \in \{0, 1, -1\} \ \forall i, j$.

Teorema 4.1.1
Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
1. A es TU.
2. A^T es TU.

3. $[A|I]$ esTU.
4. La matriz obtenida de A eliminando una fila o columna es TU.
5. La matriz obtenida de A multiplicando una fila o columna por -1 es TU.
6. La matriz obtenida de A intercambiando dos filas o dos columnas es TU.
7. La matriz obtenida de A duplicando filas o columnas es TU.
8. La matriz obtenida de A pivotando es TU.

Teorema 4.1.2
Si A es TU, entonces el poliedro $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ es entero $\forall\ b\ \in \mathbb{Z}^m$, para el cual $P(b) \neq \emptyset$.

Demostración 4.1
Si sumamos variables de holgura s al sistema, tenemos:

$$Ax + Is = b, \qquad [A \quad I]\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

Sabemos que $[A \quad I]$ es TU y que todo punto extremo corresponde a una submatriz $B_{m\times m}$ de A cumpliendo (para $det(B) \neq 0$) que:

$$x_B = B^{-1}b \qquad \to \qquad Bx_B = b$$

con $det(B) = \{-1, 1\}$. Aplicamos Cramer:

$$\begin{aligned}(x_B)_i &= \frac{det(B \text{ con la i-ésima columna reemplazada por } b)}{det(B)} \\ &= \frac{\text{suma de productos de números enteros}}{\pm 1}.\end{aligned}$$

lo cual es entero. ■

Corolario 4.1.3
Si A es TU, entonces el poliedro $Q(c) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u^T A \geq c^T, u \geq 0\}$ es entero $\forall\ c \in \mathbb{Z}^m$, para el cual $Q(c) \neq \emptyset$.

4.1.1 Condiciones suficientes

Teorema 4.1.3
Sea $A \in \mathscr{M}^{m\times n}$ una matriz tal que $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, $\forall i, j$. Entonces A es TU si y solo si para cada $Q \subseteq M = \{1, \ldots, m\}$, existe una partición Q_1, Q_2 de Q tal que

$$\left| \sum_{i\in Q_1} a_{ij} - \sum_{i\in Q_2} a_{ij} \right| \leq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

■ **Ejemplo 4.2**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si definimos $Q_1 = (-1 \quad -1)$, $Q_2 = (-1 \quad 0)$, tenemos $|-1-(-1)| = 0$ y $|-1-0| = 0$. Por lo tanto, A es TU. ■

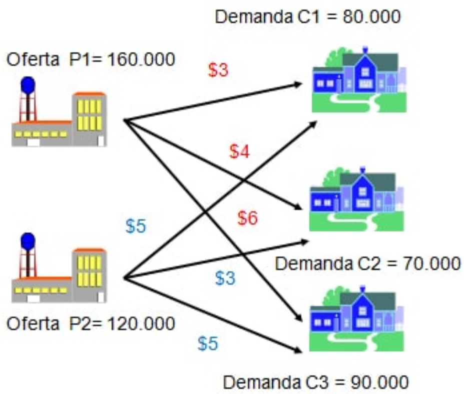
Corolario 4.1.4
Sea A una matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1,-1\}, \forall i,j$, en la que a lo sumo hay dos elementos no nulos por cada columna. Entonces A es TU si y solo si existe una partición Q_1, Q_2 de las filas de A tal que en una columna con dos elementos no nulos las siguientes afirmaciones son ciertas,

1. si los dos elementos no nulos tienen el mismo signo, entonces uno está en una fila contenida en Q_1 y otro en una fila contenida en Q_2 y
2. si los dos elementos no nulos tienen distinto signo, entonces los dos están en Q_1 o en Q_2.

Corolario 4.1.5
Si A es una matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1,-1\}$ $\forall i,j$, en lo que a lo sumo hay dos elementos distintos de 0 en cada columna y $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 0$ si en la columna $j-$ésima hay dos coeficientes distintos de 0, entonces A es TU.

4.1.2 El problema de Transporte

En general, consideremos m **orígenes** que tienen ciertas cantidades $a_i, i = 1,\ldots,m$, de una mercancia que ha de enviarse a n **destinos** para satisfacer ciertas demandas $b_j, j = 1,\ldots,n$. Supongamos conocido el coste unitario de transportar del origen i al destino j, $c_{ij}, i = 1\ldots m,\ j = 1,\ldots,n$.



El objetivo del problem consiste en minimizar el coste total de la operación satisfaciendo las condiciones. Formulamos el problema de transporte como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\ldots,n \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j.
\end{aligned}
$$

donde x_{ij} son las cantidades transportadas del origen i al destino j.

Es decir,

$$\begin{array}{lllllllllll}
\text{Min} & c_{11}x_{11}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \\
\text{s.a.} & x_{11}+\ \ldots+\ x_{1n} & & & & = a_1 \\
& & x_{21}+\ \ldots+\ x_{2n} & & & = a_2 \\
& & & \cdots \quad \cdots & & \\
& & & x_{m1}+\ \ldots+\ x_{mn} & & = a_m \\
& x_{11}+ & x_{21}+ & x_{m1}+ & & = b_1 \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& x_{1n}+ & x_{2n}+ & x_{mn} & & = b_n \\
& & x_{ij}\geq 0, \quad \forall i,j. & & &
\end{array}$$

Con lo que la matriz $A \in \mathcal{M}^{(m+n)\times m\cdot n}$, escrita por cajas quedaría

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1_n & & \ddots & \\ \hline & 1_n & \ddots & \\ \hline & & \ddots & 1_n \\ \hline I_{n\times n} & I_{n\times n} & \cdots & I_{n\times n} \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ filas} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} n \text{ filas} \end{array}$$

Las columnas de A las notaremos por a^{ij}. Las columnas son vectores de $m+n$ componentes de la forma:

$$a^{ij}=\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}=e_i+e_{m+j}$$

donde los 1 están en la posición i y $m+j$.

Supondremos que se verifica

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j \ \rightarrow \ \text{el problema está equilibrado.}$$

Si $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ \rightarrow$ el problema no tiene solución.

Si $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \ \rightarrow$ se crea un destino, $n+1$, ficticio con demanda $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ y $c_{i(n+1)}=0\ \forall i$.

Proposition 4.1.3

El problema de transporte tiene solución óptima finita.

Proposition 4.1.4

El rango de A es $m+n-1$.

Proposition 4.1.5

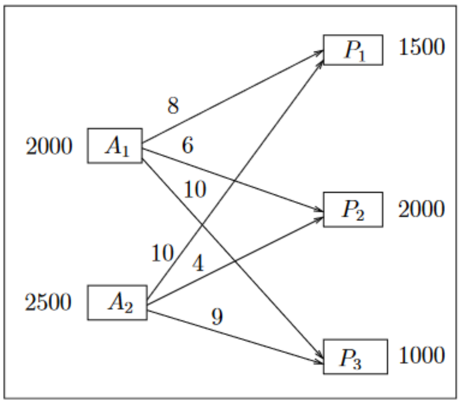
A es totalmente unimodular.

Proposition 4.1.6

Si $a_i, b_j,\ \forall i,j$ son números enteros, entonces la solución óptima del problema del transporte es entera.

Nota El algoritmo del simplex nos garantiza la resolución del problema de transporte, aunque existen algoritmos especializados que son más eficientes.

■ **Ejemplo 4.3**



Para plantear un modelo lineal que represente el problema definimos

x_{ij}: cantidad de barras de pan que se envían desde cada origen A_i, $i = 1,2$, a cada destino P_j, $j = 1,2,3$.

El modelo lineal para este problema es el siguiente:

$$\min\ z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

sujeto a

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = 2000 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = 2500 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = 1500 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = 2000 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = 1000
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

lo podríamos resolver por Simplex. Tiene sentido en el contexto de barras de pan especificar que las variables son enteros, para lo cual tendríamos que utilizar otro método. ■

4.1.3 El problema de asignación

gráfica

En general, el problema de asignación consiste en asignar n orígenes (por ejemplo individuos, instalaciones...) a n destinos (tareas, localizaciones,...) de forma que se optimice alguna medida de eficacia.

Nota: El problema de asignación es un caso particular del problema de transporte, en el que la oferta y demanda tienen valor 1.

Formalmente, sabiendo que el coste de asignar el origen i al destino j es c_{ij}, el problema de asignación se formula como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\ldots,n. \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,n. \\
& x_{ij} \text{ binarias}
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si al origen } i \text{ se le asigna el destino } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Escrito en forma matricial:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.a.} \quad & Ax = 1 \\
& x_{ij} = 0, 1.\ \forall i, j, \\
& (x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z}\ \forall i, j)
\end{aligned}
$$

donde $x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nm}) \in \mathbb{R}^{n^2}, c = (c_{11}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{n1}, \ldots, c_{nn}), A \in \mathbb{R}^{2x \times n^2}$ donde cada columna es de la forma $a^{ij} = e_i + e_{n+j},\ 1 \leq i, j \leq n$.
Este problema es el problema de transporte con $m = n$ y $a_i = b_j = 1$.

Teorema 4.1.4
Cualquier solución básica factible del problema de asinación tiene toda x^*_{ij} igual a 0 o 1.

Podríamos aplicar el método simplex para resolver este tipo de problema. En un problema de transporte general, una solución básica tnedría $2n - 1$ variables positivas, por el teorema anrterior puede haber a lo sumo n variables básicas con valor 1. Debido a esta naturaleza tan degenerada, existen algoritmos más efectivos (e.g el Algoritmo Hungaro).

Lema 4.1.1
Si en un problema de asignación sustituimos el coste c_{ij} por $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j$, con $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, el óptimo se alcanza en el mismo punto.

4.1.4 El problema del camino más corto

Definición 4.1.5 — Grafo.
Un **grafo** consta de un conjunto finito de elementos llamados **nodos** y de un subconjunto de pares de nodos llamados **arcos, ejes o aristas.**

$$
\begin{aligned}
V &= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\
E &= \{(x_i, x_j) = (i, j) \in V \times V\}
\end{aligned}
$$

una gráfica general del grafo.

- Una **cadena** entre los nodos i y j es una sucesión de arcos que los conecta.
- Un grafo es **convexo** si hay una cadena entre dos nodos cualesquiera.
- Un grafo es **dirigido** si cada arco se considera orientado. Es decir, cada arco está dado por un par ordenador de nodos (i, j) y se dice que el arco va de i a j.
- Cuando los arcos llevan asociados cantidades que representan algún **flujo** al grafo se le llama **red**.
- La **matriz de incidencia** se construye asignando un nodo a cada fila y una columna a cada arco. En la columna del arco (i, j) se coloca un 1 en la fila de nodo i y un -1 en la fila de nodo j. Un grafo queda representado por su matriz de incidencia.

Supondremos que la red es dirigida con un flujo $d_{ij} \geq 0$ asociado a cada arco (i, j). Si no existe dicho arco, asignamos $d_{ij} = \infty$. Si buscamos el camino más corto entre el nodo x_1 y el nodo x_n, podemos formar el problema con programación lineal:

Nota: Puede ocurrir que $d_{ij} \neq d_{ji}$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}xij \\
&\text{s.a} \quad \sum_{j=2}^{n} x_{1j} - \sum_{k=2}^{n} x_{k1} = 1 \qquad \text{nodo origen} \\
&\sum_{l=1,l\neq i}^{n} x_{il} - \sum_{k=1,k\neq i}^{n} x_{ki} = 0, \quad i \neq 1,n \qquad \text{cada nodo i 'interior' tiene una salida y una entrada} \\
&\sum_{j=1}^{n-1} x_{nj} - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k}n = -1 \qquad \text{nodo destino} \\
&x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

donde

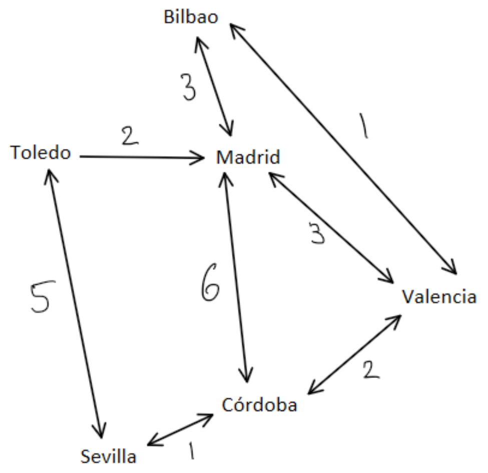
$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se toma el arco } (i,g) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}
$$

Proposition 4.1.7
La matriz de incidencia es TU.

Nota: Por ser TU la matriz de incidencia, aseguramos solución óptima x_{ij}^* por lo cual la restricción de variables enteras puede ser sustituida por $x_{ij} \geq 0$ y aplicar el algoritmo del Simplex.

■ Ejemplo 4.4
Un ejemplo para demostrar la formulación de este tipo de problema, y dando paso a explicar el método greedy.

Alguien quiere organizar un viaje desde Sevilla a Madrid en tren, donde quiere tardar lo menos posible.



Si definimos los nodos $V = \{s,c,v,m,t,b\}$ con arcos $E = \{(s,c),(s,t),(c,m),(c,v),(v,m),(v,b),(t,m),(b,m)\}$ y distancias $d_{ij} \in \{1,5,6,2,3,1,2,3\}$, la matriz de incidencia de este problema sería:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El problema se formula así:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & x_{12} + x_{15} = 1 \\ x_{23} + x_{24} - x_{12} &= 0 \\ x_{34} + x_{36} - x_{23} &= 0 \\ x_{54} - x_{15} &= 0 \\ x_{64} - x_{36} &= 0 \\ -x_{26} - x_{36} - x_{46} - x_{56} &= -1 \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i,j &= 1,\ldots,5. \end{aligned}$$

■

4.2 Ramificación y Acotación (Branch and Bound)

Dado un problema de programación entera, definimos los siguientes conceptos y el algoritmo.

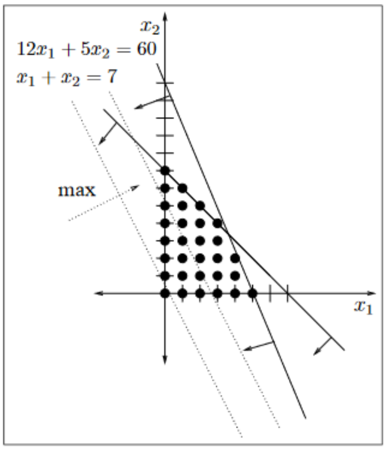
4.2.1 Resolución gráfica

Demostramos el método de Branch and Bound con un ejemplo junto a su gráfica.

■ **Ejemplo 4.5**
Consideremos el problema

$$\max \ z = 80x_1 + 45x_2$$
sujeto a
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

En la siguiente gráfica aparecen señaladas las soluciones del modelo lineal entero.



Consideremos el mismo problema, quitando la restricción de variables enteras.

$$\max \ z = 80x_1 + 45x_2$$
sujeto a
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$12x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución de este problema, utilizando el método Simplex es $x^* = (3.6, 3.4)$ con valor óptimo $z^* = 440$. Como vemos, la solución no es entera, entonces no es la solución al problema original. Descartamos un trozo de la región donde
EJEMPLO SIN ACABAR - NO SE DE DONDE VIENE

■

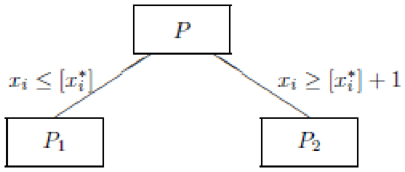
4.2.2 Algoritmo

Consideremos el problema lineal general:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & x \in X \end{aligned}$$

Definición 4.2.1 — Ramificación (Branch).
A la partición del espacio continuo del problema relajado en dos subproblemas continuos, se le llama **ramificación** del espacio.

En la ramificación del espacio, se eliminan partes no factibles del problema relajado (P). Si el óptimo del problema relajado en la variable x_i toma el valor x_i^*, entonces hacemos la siguiente partición en dos subproblemas P_1, P_2, introduciendo nuevas restricciones al problema.



donde $[x_i^*]$ denota la parte entera de x_i^*. Seguiremos ramificando hasta encontrar la solución entera óptima del problema original.

Definición 4.2.2 — Acotación (Bound).
En cada subproblema P_i **acotamos** el problema, para descartar siguientes subproblemas sin resolver, si cumple una de las siguientes condiciones:

1. El subproblema es infactible.
2. El valor del óptimo del subproblema no es mejor que una solución factible (para el problema original) encontrada previamente.

Haz una gráfica para explicar la división de la región factible y generación de los subproblemas.
Con estos conceptos, podemos desarrollar el algoritmo de **Branch and Bound**:

Paso 1: Obtener el valor óptimo z_p^* y la solución óptima x_p^* del problema relajado. Establecer (P_0), $z^* = z_P^*, x^* = x_p^*$ como elementos del nodo raíz n_0. Tomar $z_{UB} = +\infty$ y $z_{LB} = z^*$.

Paso 2:

2.1) Si $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **STOP**.

2.2) Si $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, entonces $\exists x_i^* \notin \mathbb{Z}$. Entonces establecer dos ramas que parten del nodo n_0.
Nodo n_1, constituido por el problema (P_1) resultante de añadir al problema (P) la restricción $x_i \leq [x_i^*]$. Sean $(x_1)^*$ la solución óptima y z_1^* el valor óptimo de (P_1).
Nodo n_2, constituido por el problema (P_2) resultante de añadir al problema (P) la restricción $x_i \geq [x_i^*]+1$. Sean $(x_2)^*$ la solución óptima y z_2^* el valor óptimo de (P_2).

a.) Si algún (P_i) es infactible esa rama no tiene que seguir siendo sondeada.

b.) Si $z_i^* > z_{UB}$, esa rama no tiene que seguir siendo sondeada.

c.) Si $(x_i)^* \notin \mathbb{Z}^n$, tomar $z_{LB} = z_i^*$ (en subárbol que se va a generar) y repetir Paso 2.2 tomando n_i como n_0.

d.) Si $(x_i)^* \in \mathbb{Z}^n$ y $z_i^* = z_{LB}$ entonces $(x_i)^*$ es la solución óptima del problema entero. En caso contrario y $z^* < z_{UB}$ establecer $z_{UB} = z_i^*$.

Nota El algoritmo termina en un número finito de pasos. Si todos los nodos sondeados ofrecen soluciones no enteras, el problema en infactible.

■ **Ejemplo 4.6**
ejemplo muy largo. Quizás pregunta, o dar hecho como ejemplo escrito... Sea el problema entero puro

$$\begin{aligned} \min \quad & -8x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2. \\ & x_i \text{ enteras } i = 1,2. \end{aligned}$$

gráfica de la región factible.

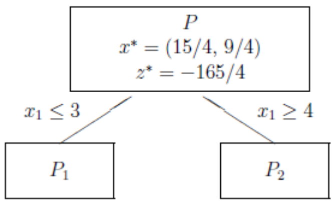
Resolvemos el problema relajado por Simplex. hago el simplex?

La solución óptima es $x_1^* = \frac{15}{4}$ y $x_2^* = \frac{9}{4}$, con $z^+ = -\frac{165}{4}$. Los valores de las variables en la solución no son enteros. Por lo tanto, escogemos una de las variables para estudiar

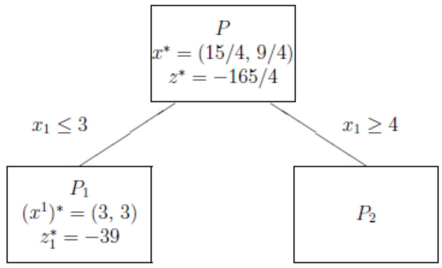
- Nodo $n_1 : (P_1)$. Se añade la restricción $x_1 \leq [x_1^*] \rightarrow\ x_1 \leq 3$.
- Nodo $n_2 : (P_2)$. Se añade la restricción $x_1 \geq [x_1^*] + 1 \rightarrow\ x_1 \geq 4$.

Nota Observamos que la unión de las regiones factibles de los problemas contiene toda la región factible del problema original. (Sólo se han eliminado partes que no contienen puntos enteros).

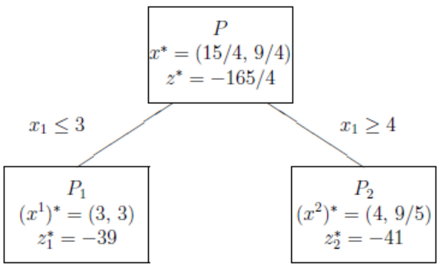
El árbol queda, por tanto:



Resolvemos (P_1) con Simplex. demuestra?. La solución es entera, por lo tanto es un nodo terminal.



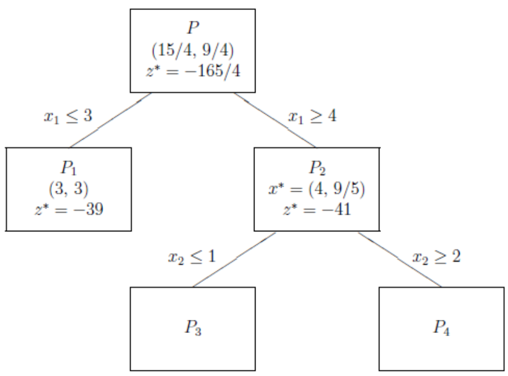
Resolvemos el problema (P_2) con Simplex demuestra? .



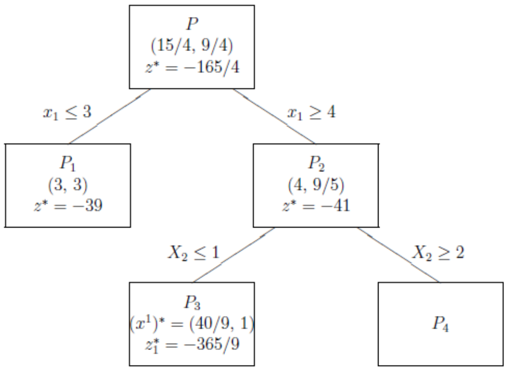
La solución no es entera, por lo tanto no es un nodo terminal, y hay que ramificar más.

Ramificamos en la variable x_2, a partir de (P_2).

- Nodo n_3 (P_3), se añade la restricción $x_2 \leq [x_2^*]\ \rightarrow\ x_2 \leq 1$.
- Nodo n_4 (P_4), se añade la restricción $x_2 \geq [x_2^*] + 1\ \rightarrow\ x_2 \geq 2$.



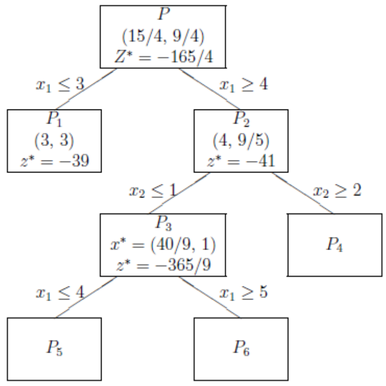
Resolvemos P_3 con Simplex, dando solución:



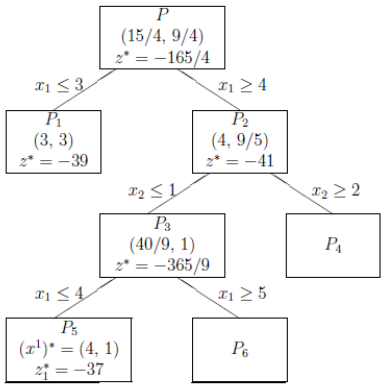
La solución no es entera, hay que seguir ramificando

Según el algoritmo, seguimos con P_3 antes de P_4

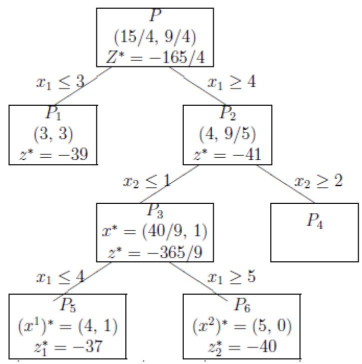
- Nodo n_5 (P_5), se añade la restricción $x_1 \leq [x_1^*] \rightarrow x_1 \leq 4$.
- Nodo n_6 (P_6), se añade la restricción $x_1 \geq [x_1^*] + 1 \rightarrow x_1 \geq 5$.



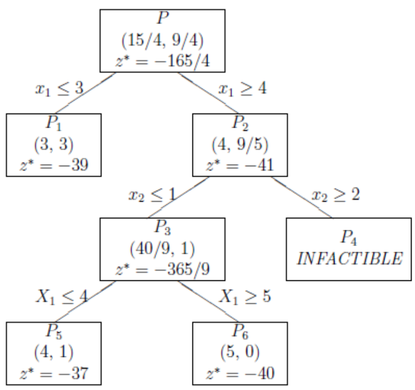
Resolviendo P_5 con Simplex, tenemos solución entera, por lo tanto es un nodo terminal.



Resolvemos P_6 con Simplex. La solución es entera, y vemos que es el mejor candidato de óptimo hasta ahora.



Volvemos al nodo de P_2. Vemos que su valor óptimo es $z^* = -41$, lo cual es menor que el mejor candidato actual. Por lo tanto, este nodo no está acotado, y deberíamos sondearlo. Así pues resolvemos P_4 con Simplex. El problema no es factible, y así acabamos el árbol.



La solución óptima es $(x_1, x_2) = (5, 0)$ con $z^* = -40$.

■

4.3 Cortes de Gomory

Otra forma de resolver problemas lineales con variables enteras. Se comienza resolviendo el problema relajado. Para las variables que han de ser enteras se introduce una nueva restricción (hiperplano de corte) que representa una condición necesaria de integridad de esa variable. Esta restricción suprime una parte de la región factible, dejando el óptimo del problema relajado infactible, sin eliminar soluciones factibles del problema original.
El hiperplano de corte:

1. Deja fuera la solución óptima del problema relajado, con lo que hay que aplicar el método del Simplex Dual.
2. Todas las soluciones factibles del problema original siguen estando en el nuevo conjunto factible.
3. Sigue manteniendo el espacio factible convexo.

4.3.1 f-corte

solo se puede aplicar si los coeficientes en las restricciones son enteros?
Sea x^* la solución optima del problema relajado y supongamos que la variable $x_i^* = B^{-1}b_i = \bar{b}_i$ no toma un valor entero. Consideremos

$$\bar{b}_i = [\bar{b}_i] + f_i,$$
$$y_{ij} = [y_{ij}] + f_{ij}, \quad \text{donde} \quad y_{ij} = B^{-1}a_{ij}.$$

donde $0 < f_i < 1$ y $0 \leq f_{ij} < 1$. La restricción que hay que introducir es:

$$f_i \leq \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j$$

que cambiando de signo e introduciendo una variable de holgura (h_i, entera no negativa) queda:

$$h_i - \sum_{j \in NB} f_{ij} x_j = -f_i$$

Con esta nueva restricción, la solución actual no es factible. Por lo tanto, seguimos con el método del Simplex Dual. Si obtenemos una solución entera, paramos. Si no, introducimos otra corte y seguimos. Si en alguna iteración se obtiene el dual ilimitado, no existe solución factible entera.

■ **Ejemplo 4.7**

z*: = max z = $5x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + x_2$ <= 6
$5x_1 + 9x_2$ <= 45
x_1, x_2 >=0, and integer

fficient of the constraints - including the RHS values - are inegers.

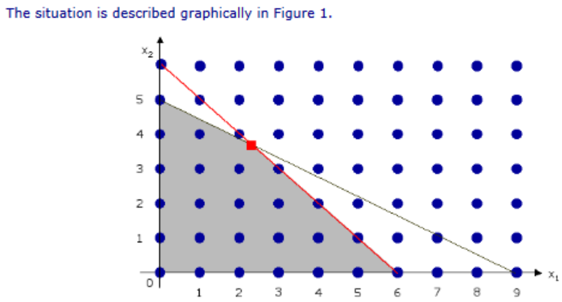
we rewrite this problem as follows:

z*: = max z = $5x_1 + 8x_2$
s.t.
$x_1 + x_2 + s_1$ = 6
$5x_1 + 9x_2 + s_2$ = 45
x_1, x_2, s_1, s_2 >=0, and integer

: slack variables associated with the two functional constraints. Note
o these variables.

the linear programming relaxation of this problem is x = (2.25,3.75).
: problem is as follows:

BV	x1	x2	s1	s2	RHS
x1	1	0	2.25	-0.25	2.25
x2	0	1	-1.25	0.25	3.75
z	0	0	1.25	0.75	41.25



Si añadimos una corte para la variable x_2:

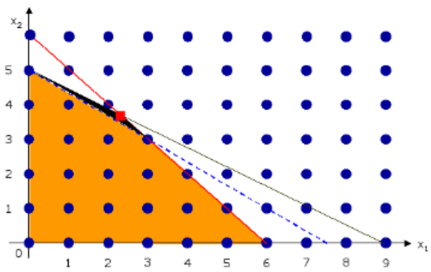
Tenemos $\hat{b}_2 = 3.75$, dando $f_2 = 0.75$, con $f_{12} = 0.75, f_{22} = 0.25$. La restricción que hay que añadir entonces es:

$$h_2 - 0.75s_1 - 0.25s_2 = -0.75$$

Resolvemos el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 + s_2 &= 45 \\ h_2 - 0.75s_1 - 0.25s_2 &= 0.75 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, h_1 &\geq 0 \ \text{ integer} \end{aligned}$$

cuyo región factible es:



■

Ahora extendemos la tabla de Simplex para incluir la restricción nueva y la variable de holgura nueva (en la base), con sus coeficientes:

básica	x_1	x_2	s_1	s_2	h_1	valor
$-z$	0	0	1.25	0.75	0	41.25
x_1	1	0	2.25	-0.25	0	2.25
x_2	0	1	-1.25	0.25	0	3.75
h_1	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75

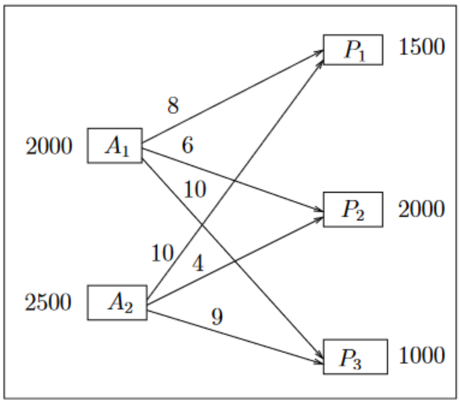
Seguimos con la resolución del problema nuevo con el método del Simplex Dual.

4.3.2 Corte mixto de Gomory

Una formada más fuerte de las cortes de Gomory, que también se puede aplicar a problemas mixtos (variables enteras y no enteras).

4.4 Problemas

1. Supongamos que una empresa productora de barras de pan tiene dos almacenes A_1 y A_2 desde los cuales debe enviar pan a tres panaderías P_1, P_2 y P_3. Las ofertas, las demandas y los costes de envío se dan en el siguiente grafo:



   a. Plantear el problema lineal que minimiza el coste de transporte para satisfacer las demandas.
   b. Definir la matriz de incidencia del problema.
   c. Demostrar que la matriz de incidencia es TU.

2. Considere un problema en el que existen n objetos de un conjunto origen que se pueden emparejar con otros n objetos destino (p.e. empleados y puestos de trabajo). Supongamos que si se realiza el emparejamiento del objeto origen i con el destino j se obtiene un beneficio $c_{ij}, \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.
   a. Formule como un problema de *Programación lineal entera* con variables binarias el problema de determinar los m emparejamientos que dan el máximo beneficio, siendo $m < n$.
   b. Modifique la formulación del apartado anterior de formar que si el objeto origen i es emparejado se incurra en un coste adicional α_i.
   c. Obtenga el dual de la relajación continua de la formulación del primer apartado.

3. Consideremos el siguiente problema lineal entera:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \;\; \text{enteras} \end{aligned}$$

   a. Resolver el problema con el método de ramificación y acotación (Branch and Bound).
   b. Demostrar la solución en particiones gráficamente.

4. El dueño de una fabrica quiere comprar maquinas nuevas - prensas y tornos. Ha obtenido una estimación que cada prensa comprada incrementará sus beneficios por 100€al día y cada torno 150 al día. La cantidad de maquinas nuevas que puede comprar está limitado por el espacio disponible en la fabrica. Los precios de las maquinas y sus requerimientos de espacio en la fabrica son:

Maquina	Espacio necesario (m^2)	Precio (€)
Prensa	15	8000
Torno	30	4000

El dueño tiene un presupuesto de 40,000€y 200 metros cuadrados de espacio en la fabrica. Formular un problema de optimización lineal entera para maximizar los beneficios diarias del dueño en comprar las maquinas nuevas. Resolver el problema con el método de ramificación y acotación (Branch and Bound).

5. Utilice el método de cortes de Gomory para resolver el siguiente problema de programación lineal entera pura

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

V

Práctica 1

part.1chapter.1section.1.1subsection.1.1.1section.1.2subsection.

5. Prácticas

`https://neos-server.org/neos/`

3 archivos:

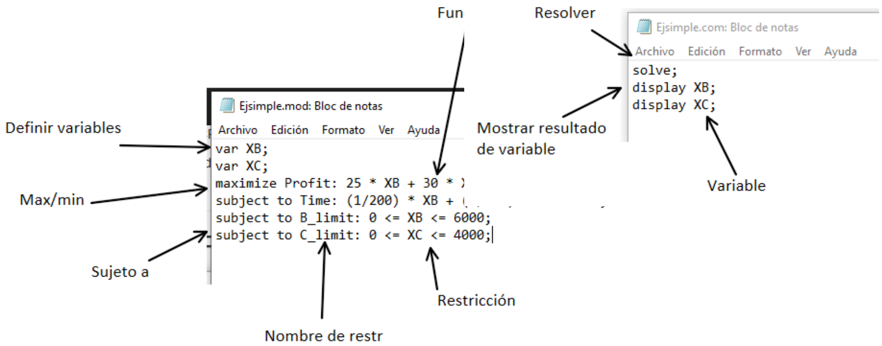
1. Modelo
2. Datos
3. Comando

5.1 Ejemplos

5.1.1 Ejemplo 1

Optimizar los beneficios de un vendedor donde x_B son las horas que dedica a tarea B y x_C son las horas que dedica a tarea C.

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & Beneficios = 25x_B + 30x_C \\
\text{s.a.} \quad & \frac{1}{200}x_B + \frac{1}{140}x_C \leq 40 \\
& 0 \leq x_B \leq 6000 \\
& 0 \leq x_C \leq 4000
\end{aligned}
$$

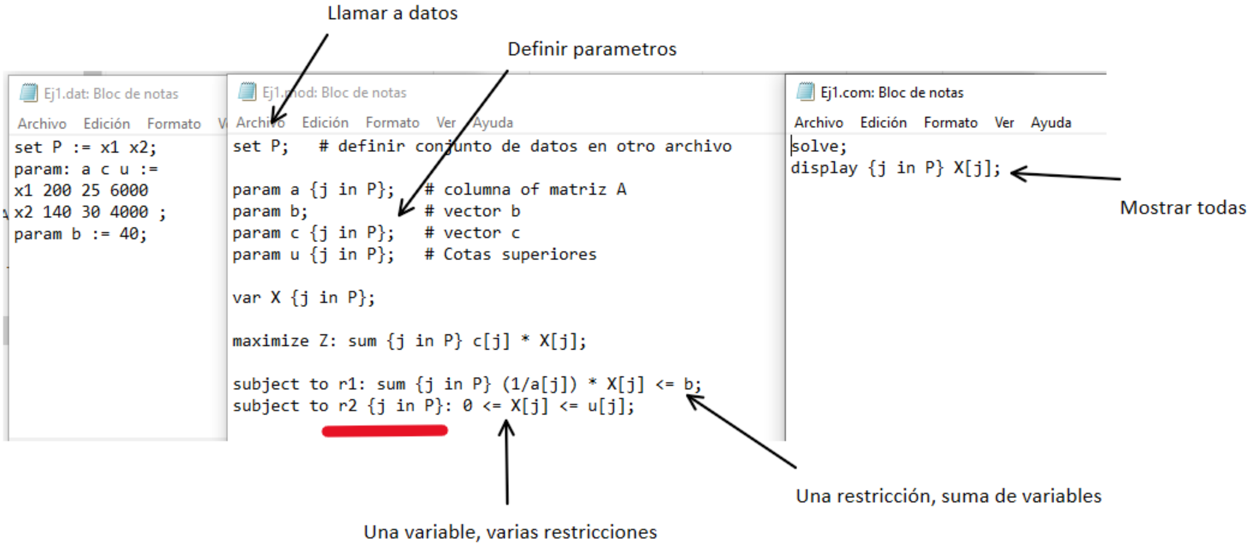


Resolviendo el problema:

```
Executing on prod-exec-2.neos-server.org

Presolve eliminates 2 constraints.
Adjusted problem:
2 variables, all linear
1 constraint, all linear; 2 nonzeros
        1 inequality constraint
1 linear objective; 2 nonzeros.

CPLEX 20.1.0.0: threads=4
CPLEX 20.1.0.0: optimal solution; objective 192000
1 dual simplex iterations (0 in phase I)
XB = 6000

XC = 1400
```

Vemos que la solución óptima es $(x_B, x_C) = (6000, 1400)$ con valor óptimo de la función objetivo 192000.

Podemos escribir el mismo problema en una forma generalizada, más adecuada para problemas con muchas variables o restricciones.



5.1.2 Ejemplo 2

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & Beneficios = 25Bands + 30Coils + 29Plates \\
\text{s.a.} \quad & \frac{1}{200}Bands + \frac{1}{140}Coils + \frac{1}{160}Plates \leq 40 \\
& Bands + Plates \leq 6000 \\
& 1000 \leq Bands \leq 6000 \\
& 500 \leq Coils \leq 4000 \\
& 750 \leq Plates \leq 3500
\end{aligned}
$$

5.1.3 Ejemplo 3

Dos empresas suministran un determinado producto a un cliente durante los dos próximos meses. Los costes unitarios de producción y envío, y las capacidades máximas de producción se recogen en la siguiente tabla:

	Mes 1			Mes 2		
	Coste de producción por unidad	Coste de envío al cliente/unid.	Capacidad	Coste de producción por unidad	Coste de envío al cliente/unid.	Capacidad
Empresa 1	35	50	7	45	60	4
Empresa 2	30	40	9	40	70	9

– Si se produce y se envía en el primer mes, el producto puede ser utilizado para satisfacer la demanda del segundo mes, pero con un coste unitario de 13 unidades.
– Al final del primer mes puede haber 6 unidades en inventario como máximo.
– El cliente necesita 9 unidades del producto en el primer mes y 11 en el segundo.

- Formular un problema de programación lineal para hallar el mínimo coste que verifique las demandas anteriores, resolviendo dicho problema con **AMPL**.

Solución

```
minimize Coste:
        35*x['xp1'] + 30*x['yp1'] + 45*x['xp2'] + 40*x['yp2'] + 50*y['xe1'] +
        40*y['ye1'] + 60*y['xe2'] + 70*y['ye2'] + 13*xi + 13*yi;

subject to Rinv:
        xi + yi <= 6;

subject to RProd['xp1']:
        x['xp1'] <= 7;

subject to RProd['yp1']:
        x['yp1'] <= 9;

subject to RProd['xp2']:
        x['xp2'] <= 4;

subject to RProd['yp2']:
        x['yp2'] <= 9;

subject to RE1:
        y['xe1'] + y['ye1'] = 9;

subject to RE2:
        y['xe2'] + y['ye2'] + xi + yi = 11;
```

5.2 Práctica 1

5.2.1 Pregunta 1

La empresa Berkeley Paint Company fábrica dos colores de pintura, azul y verde. La pintura azul se vende por 10€/litro, y la pintura verde por 15€/litro. La fabrica puede producir 40 litros/hora de la pintura azul y 30 litros/hora de la verde. El departamento de recursos humanos ordena que sólo pueden vender en una semana a lo sumo 1000 litros de la pintura azul y 860 litros de la verde. Si una semana son 40 horas de trabajo y no se puede guardar pintura entre semanas, hallar la cantidad de pintura a fabricar para maximizar los beneficios en una semana.

Solución

Sea $PaintB$ los litros de pintura azul y $PaintG$ los litros de pintura verde. El problema lineal es:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10PaintB + 15PaintG \\ \text{s.a.} \quad & \frac{1}{40}PaintB + \frac{1}{30}PaintG \leq 40 \\ & 0 \leq PaintB \leq 1000 \\ & 0 \leq PaintG \leq 860 \end{aligned}$$

P1.mod

```
var PaintB; # amount of blue
var PaintG; # amount of gold
maximize profit: 10*PaintB + 15*PaintG;
subject to time: (1/40)*PaintB + (1/30)*PaintG <= 40;
subject to blue_limit: 0 <= PaintB <= 1000;
subject to gold_limit: 0 <= PaintG <= 860;
```

P1.com

```
solve;
```

Solución: $PaintB = 453.333 \quad PaintG = 860 \qquad z^* = 17433.3333.$

5.2.2 Pregunta 2

La empresa Berkeley Paint Company ha expandido sus operaciones. Ahora tiene 3 fábricas, pero sólo produce pintura azul. En una semana, la empresa tiene que enviar pintura a cuatro clientes. En la siguiente tabla se resume el coste de envío entre cada fábrica a cada cliente:

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Fábrica 1	1	2	1	3
Fábrica 2	3	5	1	4
Fábrica 3	2	2	2	2

El suministro de cada fábrica es:

Fábrica 1	250
Fábrica 2	800
Fábrica 3	760

La demanda de cada cliente es:

Cliente 1	300
Cliente 2	320
Cliente 3	800
Cliente 4	390

Formular el problema lineal para minimizar el coste de envío que verifique la demanda de los clientes. (Nota: la demanda total es igual al suministro total)

Solución

Sea x_{ij} la cantidad de litros de pintura azul enviado desde fábrica i a cliente j y sea c_{ij} el coste a cada envío. Si el suministro es $S = \{250, 800, 760\}$ y la demanda es $D = \{300, 320, 800, 390\}$, el problema lineal es:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = S_i \quad \forall i = 1, \dots 3 \\ & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = D_j \quad \forall j = 1, \dots 4 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

P2.mod

```
set Warehouses;
set Customers;
#transportation cost from warehouse i
#to customer j
param cost{i in Warehouses, j in Customers};
param supply{i in Warehouses}; #supply at warehouse i
param demand{j in Customers}; #demand at customer j
var amount{i in Warehouses, j in Customers};
minimize Cost:
sum{i in Warehouses, j in Customers} cost[i,j]*amount[i,j];
subject to Supply {i in Warehouses}:
sum{j in Customers} amount[i,j] = supply[i];
subject to Demand {j in Customers}:
sum{i in Warehouses} amount[i,j] = demand[j];
subject to positive{i in Warehouses, j in Customers}:
amount[i,j]>=0;
```

P2.dat

```
set Warehouses:= Oakland San_Jose Albany;
set Customers:= Home_Depot K_mart Wal_mart Ace;
param cost: Home_Depot K_mart Wal_mart Ace:=
Oakland 1 2 1 3
San_Jose 3 5 1 4
Albany 2 2 2 2;
param supply:= Oakland 250
San_Jose 800
Albany 760;
param demand:= Home_Depot 300
K_mart 320
Wal_mart 800
Ace 390;
```

P3.com

```
solve;
display amount;
```

Solución:

```
CPLEX 20.1.0.0: optimal solution; objective 2570
1 dual simplex iterations (0 in phase I)
amount :=
Albany   Ace          390
Albany   Home_Depot    50
Albany   K_mart       320
Albany   Wal_mart       0
Oakland  Ace            0
Oakland  Home_Depot   250
Oakland  K_mart         0
Oakland  Wal_mart       0
San_Jose Ace            0
San_Jose Home_Depot     0
San_Jose K_mart         0
San_Jose Wal_mart     800
;
```

5.2.3 Pregunta 3

Un banco está desarrollando una política de préstamos que implica una inversión máxima de 12 millones de euros durante un periodo de un año. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles durante el periodo considerado.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagable
Personal	0.14	10
Automóvil	0.13	7
Vivienda	0.12	3
Agrícola	0.125	5
Comercial	0.1	2

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses (por ejemplo, en los préstamos personales el banco pierde el 10 % por deuda impagable, por lo que el banco recibirá un 14 % de intereses sobre 90 % del préstamo original).
La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación del 40 % como mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción, los préstamos para vivienda deben ser por lo menos del 50 % del montante total dedicado a préstamos personales. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4 %. Se supone que todos los préstamos se emiten en bloque al principio del periodo considerado.
Plantear un problema de programación lineal que sirva para encontrar el máximo rendimiento neto (ingresos menos pérdidas) y resolverlo con *AMPL*.

Solución

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_i t_i(1-d_i)x_i \\ \text{s.a} \quad & x_4 + x_5 \geq 0.4 \\ & x_3 \geq 0.5 * x_1 \\ & d_i x_i \leq 0.04 \quad \forall i. \end{aligned}$$

donde $x = personal, automvil, vivienda, agrcola, comercial$, d es la deuda impagable y t la tasa de interés de cada tipo de préstamo.