Física I: Mecánica

Un viaje a través de las leyes del movimiento por medio de sus conceptos y ejercicios resueltos

Dr. Patricio Venegas-Aravena

Grupo de física aplicada, Departamento de Ingeniería, Universidad Loyola Andalucía, Campus Sevilla, España



http://doi.org/10.5281/zenodo.24282695

Título de la obra: Física I: Mecánica. *Un viaje a través de las leyes del movimiento por medio de sus conceptos y ejercicios resueltos.*

Primera edición: Noviembre de 2026

Copyright © 2026 por **Dr. Patrico Venegas-Aravena**

Todos los derechos reservados. Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita del titular del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

Esta es una obra de no-ficción. Los nombres, personajes, lugares y incidentes son producto de hechos históricos y científicos bien documentados o de público conocimiento.

DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.24282695
Impreso en España / Printed in Spain

Sobre el autor

Dr. Patricio Venegas-Aravena es profesor e investigador en la Universidad Loyola Andalucía y especialista en física de la ruptura, sismología, mecánica multiescala y simulaciones computacionales. Doctor en Ingeniería por la Pontificia Universidad Católica de Chile, con estancia internacional en la Universitè Côte D'Azur, ha complementado su formación computacional estudiando Inteligencia Artificial en el Massachusetts Institute of Technology (MIT). También cuenta con un Magíster en Geofísica por la Universidad de Chile y un grado en Física por la Universidad de Concepción. En su formación cuenta con 4 grandes tutores: Dr. J. Crempien (University of California) junto con el Dr. D. Hurtado (Caltech) en su doctorado y a Dr. E. Vera (Columbia University) junto a Dr. E. Cordaro (Università di Bologna) para su máster.

Su investigación abarca la fricción en sólidos, la modelación numérica avanzada de rupturas heterogéneas, movimiento del suelo, la disipación de energía (termodinámica multiescala), derivadas fraccionarias y deep learning aplicado a la física. Temas en los que cuenta con más de una veintena de publicaciones internacionales. Con una dilatada experiencia docente en mecánica, electromagnetismo, vibraciones y ondas, vuelca en esta obra su rigor científico y su capacidad para conectar la teoría con ejemplos y ejercicios.

Índice general

Sobre el autor 3
Prefacio 8

1. Teoría de incertidumbres **11**
1.1. Conceptos fundamentales 11
1.1.1. Medición y variables 11
1.1.2. Exactitud y precisión 12
1.1.3. Errores y tipos de errores 12
1.2. Presentación de resultados y cifras significativas 13
1.2.1. Cifras significativas 13
1.2.2. Reglas de operación 14
1.2.3. Reglas de redondeo 14
1.2.4. Notación científica 14
1.2.5. Expresión Formal de una Medición 15
1.3. Incertidumbre en mediciones directas 15
1.3.1. Estimación de la Incertidumbre Instrumental 15
1.3.2. Medición Única vs. Múltiples Mediciones 16
1.3.3. Introducción a la Estadística Básica 16
1.4. Propagación de incertidumbre (cálculos indirectos) 17
1.4.1. Fundamento de la propagación 18
1.4.2. Propagación por suma y resta 18
1.4.3. Propagación por multiplicación y división 18
1.4.4. Propagación para potencias y constantes 19
1.4.5. Regla general de la propagación 19
1.5. Representación gráfica y ajuste de datos 20
1.5.1. Gráficos de datos experimentales 20
1.5.2. Regresión lineal 20
1.5.3. Cálculo de la incertidumbre de la pendiente y el intercepto 21
1.5.4. Simplificaciones útiles 22
1.5.5. Coeficiente de determinación 26

2. Movimientos y coordenadas **29**
2.1. Posición y movimiento 29
2.2. Velocidad media y Velocidad instantánea 31

2.3. Aceleración instantánea 32
2.4. Movimiento uniformemente acelerado 33
2.5. Elementos de línea, área y volúmen en coordenadas cilíndricas y esféricas . . 37
2.6. Velocidad angular 39
2.6.1. Velocidad angular en función de la posición 41
2.7. Coordenadas y movimiento 45
2.8. Aceleración centrípeta y tangencial 50
2.9. Teorema Fundamental de la Cinemática 53
2.10. Domingo de Soto y la aceleración de gravedad constante 54

3. Dinámica **57**
3.1. Momentum lineal, fuerza y leyes de Newton 57
3.1.1. Momentum lineal 57
3.1.2. Fuerza 58
3.1.3. Leyes de Newton 59
3.2. Muchas partículas 65
3.2.1. Suma de masas y centro de masa 65
3.2.2. Momentum lineal y segunda ley de Newton para muchas partículas . 68
3.2.3. Caso continuo 69
3.3. Momento angular y torque 71
3.4. Sistemas de dos partículas 74
3.5. Fuerzas centrales 77

4. Fuerzas específicas y movimiento **81**
4.1. Ley de gravitación universal 81
4.2. Fuerza elástica (ley de Hooke) 83
4.3. Fricción 84
4.3.1. Roce estático 84
4.3.2. Roce cinético 85
4.4. Roce viscoso 86
4.5. Integración numérica de ecuaciones de movimiento 88

5. Trabajo y energía **91**
5.1. Trabajo y energía cinética 91
5.2. Potencia 94
5.3. Energía cinética de un sistema 96
5.4. Fuerzas conservativas y energía potencial 99
5.4.1. Ejemplo de fuerzas centrales 100
5.5. Energía mecánica total no conservada 103

6. Equilibrio y oscilaciones **105**
6.1. Energía potencial y equilibrio 105
6.2. Pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio 106

6.3. Oscilador con dos masas y dos resortes 109
6.4. Oscilador forzado 112
6.5. Oscilador amortiguado 116
6.6. Oscilador forzado y amortiguado 119

7. Fuerzas centrales y planetas **123**
7.1. Barrera centrífuga 123
7.2. La ecuación de Binet 124
7.3. La ecuación de la órbita 125
7.3.1. Cónicas 127
7.4. La ecuación de Verlet 130
7.5. La misteriosa materia oscura 132

8. Movimiento relativo **135**
8.1. Cinemática relativista clásica 135
8.2. Velocidad y aceleración en un sistema no inercial 137
8.2.1. Aceleración no inercial 141
8.3. La ecuación de movimiento para sistemas no inerciales 142
8.3.1. Nave espacial con anillo que rota 144
8.3.2. Coriolis en la Tierra 145
8.3.3. Péndulo de Foucault en la Tierra 147

9. Vectores deslizantes **153**
9.1. Soportes y momentos 155
9.2. Campo de momentos 155
9.3. Los Invariantes del Sistema de Fuerzas 157
9.3.1. Eje central 158
9.4. Equivalencia de sistemas 161
9.4.1. Reducción y reducción canónica 161
9.5. Movimientos planos 164

10. Dinámica de cuerpos rígidos **167**
10.1. Momento de inercia 169
10.2. Momento angular y torque con momento de inercia 172
10.3. Forma matricial del tensor de inercia 174
10.4. Teorema de Steiner (o de los Ejes Paralelos) 183
10.5. Energía cinética y matriz de inercia 188

11. Mecánica avanzada: Formalismo Lagrangiano **193**
11.1. Principio de Maupertuis-Hamilton y Lagrangianos 193
11.1.1. Mínima acción 195
11.2. Teorema de Emmy Noether 199

12. Reflexiones finales **203**

Prefacio

La mecánica, como rama fundamental de la física, constituye uno de los pilares sobre los que se apoya no solo la comprensión del mundo natural, sino también el desarrollo tecnológico que ha acompañado a la humanidad desde sus orígenes. Comprender cómo y por qué se mueven los cuerpos, qué leyes gobiernan ese movimiento y de qué manera podemos predecir y controlar fenómenos físicos, resulta esencial en la formación de todo estudiante universitario en ciencias e ingeniería.

De esta forma, este libro nace con la intención de ofrecer al estudiante una introducción clara, progresiva y (muy) rigurosa a los conceptos más importantes de la mecánica clásica, sin perder de vista la motivación práctica y el sentido intuitivo de las ideas. El orden de estos contenidos está fuertemente inspirado en los cursos de mecánica que me tocó dictar durante algunos años en la facultad de ingeniería (o *inJeniería* como dice su pórtico en Beauchef 850) de la Universidad de Chile y de los apuntes de los cursos de física de la University of California, Berkeley (apuntes que me facilitó el Dr. E. Cordaro en su momento).

El presente material está adaptados a las necesidades de la escuela de ingeniería de la Universidad Loyola Andalucía (principalmente al grado de *Ingeniería Aeroespacial* y *matemáticas aplicadas*). Estos contenidos exponen los principios fundamentales de la mecánica racional, como las leyes de Newton, el trabajo y la energía, el momento lineal y angular, o las oscilaciones, y se exploran sus aplicaciones en contextos variados, desde problemas ideales hasta situaciones cercanas a la vida real. El libro se expande hasta la mecánica Lagrangiana, tan útil para resolver ejercicios de mayor complejidad. De esta forma, se abarca la mecánica desde la escuela de Oxford en la Edad Media, pasando por Domingo de Soto, Kepler, Newton hasta el teorema de la notable Emmy Noether hace unas décadas atrás, por lo que corresponde a un viaje de cerca de 650 años de progreso en la física.

Un aspecto central de esta obra es la inclusión de ejercicios resueltos, concebidos no solo como una herramienta de práctica, sino como una guía que acompaña el proceso de razonamiento físico y matemático. Cada problema ha sido cuidadosamente seleccionado y desarrollado paso a paso, de manera que el lector pueda reconocer las estrategias generales, los atajos útiles y los errores comunes que suelen surgir en la resolución de ejercicios de mecánica.

El texto está pensado para estudiantes de los primeros años universitarios que se inician en el estudio formal de la física, aunque también puede servir de repaso para quienes cursan materias más avanzadas y necesitan reforzar las bases. Asimismo, se ha buscado un equilibrio entre el rigor conceptual y la accesibilidad pedagógica: se parte de ejemplos cotidianos y se avanza hacia formulaciones más abstractas, preparando al lector para afrontar con confianza cursos posteriores de física teórica, dinámica avanzada o mecánica analítica.

Espero que este libro no sea solo una herramienta académica, sino también una invitación a disfrutar del acto de pensar físicamente. La mecánica no es solo un conjunto de fórmulas

(como suele pensarse lamentablemente), sino una manera de descubrir patrones dentro de la naturaleza, de conectar el razonamiento lógico con la experiencia del día a día y, en última instancia, de maravillarse ante la coherencia del universo.

Capítulo 1

Teoría de incertidumbres

Este capítulo es fundamental y debe ser estudiado antes de sumergirnos en la cinemática, dinámica, y el resto de la mecánica. En el mundo de la ingeniería y la física experimental, ninguna medición es perfecta. Siempre existe un grado de duda o incertidumbre. Aprender a manejar, reportar y propagar estas incertidumbres no es solo una habilidad matemática; es una práctica profesional esencial que determina la fiabilidad de sus diseños, simulaciones y análisis. Al completar este capítulo, usted tendrá las herramientas para garantizar que sus datos experimentales sean presentados con la precisión y exactitud requeridas en la ingeniería.

1.1. Conceptos fundamentales

1.1.1. Medición y variables

Una medición es la asignación de un valor numérico a una magnitud física, que se obtiene al compararla con una unidad patrón. Este valor siempre debe ir acompañado de su unidad y, como veremos en este capítulo, su incertidumbre.
Formalmente, una medición M se expresa como la relación entre la magnitud física X a medir y una unidad de referencia $[X]$. Esto es:

$$M = \{X\}[X] \tag{1.1}$$

Donde $\{X\}$ es el valor numérico (la cantidad) y $[X]$ es la unidad (como metros, segundos o kilogramos).
En cualquier experimento o análisis, las magnitudes físicas se clasifican en variables según su rol en la determinación del resultado:

- Variable Independiente: Es la variable que el experimentador controla y manipula directamente. Se asume que no depende de otras variables del experimento.
- Variable Dependiente: Es la variable que se mide y cuyo valor cambia como resultado de la manipulación de la variable independiente.

- Variables de Control: Son aquellas variables que deben mantenerse constantes para asegurar que cualquier cambio en la variable dependiente sea únicamente atribuible a la variable independiente.

Note que en el análisis de datos y la representación gráfica, se acostumbra a colocar la variable independiente en el eje horizontal (abscisas, eje x) y la variable dependiente en el eje vertical (ordenadas, eje y).

1.1.2. Exactitud y precisión

Aunque a menudo se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano, en física e ingeniería, la exactitud y la precisión son conceptos distintos y fundamentales para evaluar la calidad de una medición.
La exactitud mide qué tan cerca está una medición, o el promedio de un conjunto de mediciones, del valor verdadero (o valor aceptado). Por otro lado, la precisión indica qué tan cerca están varias mediciones repetidas entre sí. Mide la repetibilidad de un instrumento o método.
Esto se puede entender mejor con la analogía del Tiro al Blanco. Una alta exactitud significa que los disparos se agrupan cerca del centro. En cambio, una alta precisión indica que los disparos se agrupan muy juntos, sin importar dónde estén en el blanco. Esto nos lleva a plantear un escenario ideal, en el que existe una alta exactitud y alta precisión, lo que para este caso significa que los disparos están agrupados y en el centro.

1.1.3. Errores y tipos de errores

El error es la diferencia entre el valor medido X y el valor verdadero (V_T) de una magnitud. Matemáticamente, esto es:

$$\text{Error} = X - V_T \tag{1.2}$$

Existen dos categorías principales de errores:

Errores sistemáticos: son aquellos que afectan a las mediciones de manera constante y predecible (siempre en la misma dirección, ya sea siempre por exceso o siempre por defecto). Están directamente ligados a la exactitud del experimento.
Algunas causas comunes son los instrumentos que no están calibrados correctamente (p. ej., una balanza que lee 0.5 g cuando no hay nada en ella), lo que se llama *error de cero*. También caen dentro de esta categoría los defectos del instrumento. Por ejemplo, cuando el reloj de un cronómetro digital funciona consistentemente, pero es un poco lento. Otra causa es usar un método defectuoso. Por ejemplo, medir la longitud de un cable caliente que se encoge al enfriarse, lo que introduce una subestimación constante.
Para evitar esta clase de errores, es importante comparar los resultados con estándares de referencia o usar diferentes métodos de medición. Si el error persiste de forma consistente, es sistemático. Generalmente se corrigen calibrando el equipo, ajustando el método o aplicando

una corrección matemática simple a los datos (p. ej., restar el error de cero).

Errores aleatorios: La segunda categoría de errores corresponde a los errores aleatorios (o accidentales) y son aquellos que varían de forma impredecible en magnitud y signo. Se deben a factores incontrolables y fluctuaciones que ocurren al azar. Están directamente ligados a la precisión del experimento.
Las causas comunes son fluctuaciones en el entorno (p. ej., variaciones ligeras de temperatura o vibraciones), limitaciones en la capacidad del experimentador para leer con precisión (p. ej., error de paralaje) o limitaciones inherentes a la resolución del instrumento.
Dado que los errores aleatorios tienden a cancelarse si se promedian muchas mediciones (es decir, la probabilidad de un error positivo es igual a la de uno negativo), se utiliza la estadística para estimarlos y reducirlos. Esto es conocido como *tratamiento estadístico* de los errores. La mejor manera de reducir el impacto del error aleatorio en el resultado final es tomar un gran número de mediciones (N) de la misma magnitud. Con esta base de datos, el valor más probable se toma como la Media Aritmética ($\bar{x}$) de las N mediciones:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.3}$$

Aquí es importante destacar que los errores sistemáticos no se pueden reducir promediando más mediciones, ya que el error constante persistirá en cada una de ellas. Solo los errores aleatorios se reducen con el aumento de la muestra.

1.2. Presentación de resultados y cifras significativas

1.2.1. Cifras significativas

Las Cifras Significativas en una medición incluyen todos los dígitos que son conocidos con certeza, más el último dígito estimado (incierto). Son importantes porque indican la precisión de la herramienta de medición y se dividen en cinco casos:

1. Cifras sin ceros: Todos los dígitos diferentes de cero siempre son significativos. Por ejemplo, la cantidad 23.45 g posee 4 cifras significativas.

2. Cifras con ceros Intercalados: Los ceros entre dos dígitos no cero siempre son significativos. Por ejemplo, la cantidad 1005 m/s también tiene cuatro cifras significativas.

3. Cifras con ceros a la Izquierda: Los ceros que preceden al primer dígito no cero nunca son significativos (solo localizan la coma decimal). Por ejemplo, la canidad 0.0035 L solo posee dos cifras significativas (el tres y el cinco).

4. Cifras con ceros a la derecha con coma decimal: Los ceros al final de un número son significativos, pues indican la precisión. Un ejemplo es la cantidad 12.50 N, el cual tiene 4 cifras significativas.

5. Cifras con ceros a la derecha sin coma decimal: Estas son cantidades más ambiguas. Por lo tanto, se asume que no son significativos, a menos que se use la notación científica. Por ejemplo, la cantidad 4500 km posee dos cifras significativas (el cuatro y el cinco).

1.2.2. Reglas de operación

El uso de cifras significativas exige una aplicación adecuada para operaciones matemáticas. Aquí consideramos los dos tipos de operaciones básicas:

- Suma y resta: El resultado debe tener el mismo número de posiciones decimales que el término con la menor cantidad de decimales. Por ejemplo, la suma 10.34 m+2.115 m se compone de un término con dos cifras decilames y otro de tres cifras decimales. Luego, la suma debe tener dos cifras decimales. Es decir, que el resultado debe ser **12.46** m.

- Multiplicación y división: De igual forma, el resultado debe tener el mismo número total de cifras significativas que el factor con la menor cantidad de cifras significativas. Por ejemplo, si planteamos la siguiente operación:

$$3.0\,kg \times 4.15\ m/s^2 \tag{1.4}$$

  vemos que el primer término tiene dos cifras significativas y el segundo tiene tres. Por lo tanto, el resultado también debe tener solo dos cifras significativas. Esto es igual a 12 N.

1.2.3. Reglas de redondeo

El redondeo es una acción que se aplica después de realizar operaciones para ajustar el resultado al número correcto de cifras significativas. Estos se dividen en dos reglas: si el último dígito es menor que cinco o si es mayor o igual a cinco. En el primer caso, el dígito precedente permanece igual. Por ejemplo, si tenemos la cantidad 4.153 y queremos tener una de tres cifras significativas, la cantidad queda 4.15. En el segundo caso, el dígito precedente se aumenta en uno. Por ejemplo, si tenemos la cantidad 4.156 y otra vez queremos tener una de tres cifras significativas, ocurre el redondeo de la forma 4.16.

1.2.4. Notación científica

La Notación Científica es esencial para manejar números muy grandes o muy pequeños de manera concisa y para eliminar la ambigüedad de los ceros que puedan existir a la derecha. Un número en notación científica se expresa como:

$$A \times 10^n \tag{1.5}$$

Donde A es un número entre 1 y 10 (incluyendo 1) que contiene todas las cifras significativas del valor, y n es un entero (positivo o negativo). El cuadro 1.1 nos muestra algunos ejemplos de cómo se escriben diferentes números en notación científica:

Número original	Notación científica	Cifras significativas	Explicación
0.000000450 m	$4.50\times10^{-7}\,m$	3	El 4, 5 y 0 final son significativos.
23000 W	$2.3\times10^{4}\,W$	2	Los ceros no son significativos.
23000. W	$2.3000\times10^{4}\,W$	5	El punto decimal hace que todos los ceros sean significativos.

Cuadro 1.1: Cuadro con notaciones científicas

1.2.5. Expresión Formal de una Medición

En ingeniería y física experimental, el resultado final de una medición o un cálculo debe presentarse siempre de la siguiente forma estándar, que une el valor con su incertidumbre:

$$\text{Valor medido} \pm \text{Incertidumbre Absoluta} \quad [\text{unidades}] \tag{1.6}$$

En notación matemática:

$$M = X \pm \delta X\,[X] \tag{1.7}$$

Aquí es importante tener en cuenta que la incertidumbre absoluta δX debe reportarse con solo una cifra significativa, y el valor medido (X) debe ser redondeado de tal manera que su última cifra coincida en posición decimal con la cifra significativa de la incertidumbre. Imaginemos que tenemos la siguiente expresión:

$$X \pm \delta X = 15.3456 \pm 0.0234 \tag{1.8}$$

Para ajustar esta expresión, debemos seguir tres pasos. El primero es redondear δX. Esto es, la incertidumbre se redondea a una sola cifra significativa, por lo que pasamos de $\delta X = 0.0234$ a $\delta X = 0.02$. El segundo paso es redondear X. Es decir, el valor medido se redondea a la misma posición decimal que la incertidumbre redondeada. Para este ejemplo, redondeado a la centésima (de 15.3456 a $X = 15.35$). Luego, el último paso es juntar todo lo anterior, quedándonos:

$$X \pm \delta X = 15.35 \pm 0.02 \tag{1.9}$$

Lo que es la forma correcta de expresar una incertidumbre usando redondeos y cifras significativas.

1.3. Incertidumbre en mediciones directas

Una medición directa es aquella que se obtiene leyendo el valor directamente de un instrumento. La incertidumbre asociada a estas mediciones puede deberse al instrumento mismo o a la variación natural del fenómeno.

1.3.1. Estimación de la Incertidumbre Instrumental

La incertidumbre instrumental es el error mínimo que puede introducir el aparato de medición. Se estima con base en la resolución o la mínima división del instrumento.

Para una medición única, la incertidumbre instrumental δX_{inst} requiere de diferentes procedimientos dependiendo de si el instrumento es analógico o digital. En el primer caso δX_{inst} se toma como $\frac{1}{2}$ de la mínima división de la escala (la apreciación). Por ejemplo, consideremos que la mínima división de una regla graduada en milímetros es 1 mm. Esto implica que:

$$\delta X_{inst} = \frac{1\,mm}{2} = 0.5\ mm = 0.0005\ m = \delta L \tag{1.10}$$

donde δL es la incertidumbre de la longitud.
El segundo tipo de incertidumbre instrumental es el asociado a instrumentos digitales. Generalmente, se toma δX_{inst} como la mínima unidad que el display (pantalla) puede mostrar. Por ejemplo, si un voltímetro muestra hasta la centésima, digamos 12.56 V, la mínima división posible es 0.01 V. Luego, la incertidumbre instrumental es δV =0.01 V.

1.3.2. Medición Única vs. Múltiples Mediciones

El enfoque para estimar la incertidumbre total depende de si el valor se obtiene una sola vez o a través de una serie de repeticiones. Si el fenómeno a medir es constante (por ejemplo, la longitud de una mesa), se toma una única lectura X y la incertidumbre se asocia directamente a la instrumental:

$$\delta X_{total} \approx \delta X \tag{1.11}$$

Por lo que el resultado de esta medida se puede expresar como:

$$\text{Resultado} = X \pm \delta X_{inst} \tag{1.12}$$

En cambio, si el fenómeno a medir es variable o requiere habilidad del operador (por ejemplo, el tiempo de reacción o la duración de un evento), se toman N mediciones $(x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$. En este caso, la dispersión o el error aleatorio de los datos es la fuente principal de incertidumbre. Se recurre al análisis estadístico.

1.3.3. Introducción a la Estadística Básica

Cuando se toman múltiples mediciones $(x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$, se utilizan parámetros estadísticos para determinar el valor más representativo y su incertidumbre. Por ejemplo, la **media aritmética** $\bar{x}$ o valor promedio es la mejor estimación del valor verdadero de la magnitud medida (como se muestra en la ecuación 1.3). Por ejemplo, consideremos que hemos medido cinco tiempos para la caída de un objeto: 1.51,1.48,1.55,1.50,1.52, en segundos. El tiempo promedio de caída es:

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{1}{5}(1.51 + 1.48 + 1.55 + 1.50 + 1.52\,s) = 1.512\ s \tag{1.13}$$

Otra de las herramientas estadísticas es la **desviación estándar** σ la cual es una medida de la dispersión o variabilidad de los datos. Indica cuánto se separan los valores individuales

de la media. Para una muestra de N mediciones (que es lo que se tiene en el laboratorio), se usa la fórmula de la **desviación estándar** muestral:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = u_A(x) \tag{1.14}$$

Este valor también se le conoce como u_A, lo que describe la **incertidumbre tipo A** de la media. Esta cantidad también nos permite calcular el **error estándar de la media** (EEM) $\sigma_{\bar{x}}$ y es la medida más representativa de la incertidumbre aleatoria de un conjunto de datos. Representa la precisión con la que la media ($\bar{x}$) estima el valor verdadero. Para un conjunto de datos, el EEM es la desviación estándar dividida por la raíz cuadrada del número de mediciones:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1.15}$$

Cuando se tienen pocas medidas o una distribución aproximadamente normal (gaussiana), el intervalo total de valores suele contener cerca del 99.7 % de los datos dentro de ± 3 desviaciones estándar. Esto significa que la diferencia entre la medida máxima y mínima es aproximadamente 6 veces la desviación estándar. Esto es:

$$X_{max} - X_{min} \approx 6 \times \sigma = 6 \times u_A(X) \Longrightarrow \boxed{u_A(X) \approx \frac{X_{max} - X_{min}}{6}} \tag{1.16}$$

En mediciones repetidas, se define la incertidumbre tipo B u_B, la cual se estima a partir de fuentes no estadísticas, como la resolución del instrumento (mínima división apreciable), la tolerancia del fabricante, o el error sistemático conocido.
Si el instrumento tiene una resolución de lectura δX, se asume una distribución uniforme (rectangular) de probabilidad entre $\pm\frac{\delta X}{2}$. En ese caso, la incertidumbre típica equivale a la desviación estándar de esa distribución. Sin embargo, en muchos laboratorios universitarios se usa directamente la aproximación simple:

(1.17)

1.4. Propagación de incertidumbre (cálculos indirectos)

Cuando se calcula una magnitud física Z a partir de otras magnitudes medidas directamente $(X, Y, ...)$ el resultado de Z se considera una medición indirecta. La incertidumbre en Z (representada por δZ) debe ser calculada a partir de las incertidumbres de las mediciones directas $(\delta X, \delta Y, ...$ Este proceso se llama propagación de incertidumbre.

1.4.1. Fundamento de la propagación

El objetivo es determinar cómo las variaciones aleatorias e independientes en las variables de entrada $(X, Y, \dots)$ se combinan para producir la incertidumbre en la salida Z. ahora, si Z es una función de X, Y, se puede escribir como:

$$Z = f(X, Y) \tag{1.18}$$

Las incertidumbres δX y δY son independientes, por lo que no se suman simplemente. Para estimar la incertidumbre resultante, se usa la suma en cuadratura (técnicas para calcular el error), basada en la estadística, para reflejar la probabilidad de que los errores no se sumen todos en el peor sentido al mismo tiempo.

1.4.2. Propagación por suma y resta

Si la función Z es la suma o la resta de las variables independientes X e Y, tenemos:

$$Z = X \pm Y \tag{1.19}$$

La incertidumbre absoluta en Z (δZ) se calcula mediante la suma en cuadratura de las incertidumbres absolutas (δX y δY) de la forma:

$$\delta Z = \sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2} \tag{1.20}$$

Nota que esto se define de esta manera independiente de si la función es una suma o una resta.
Consideremos un ejemplo de medición relacionado a un cambio de posición. Supongamos que la posición final e inicial son: X_f =5.20±0.05 m y X_i =1.10±0.05 m. Si definimos la función Z como el desplazamiento ΔX (donde $\Delta X = X_f - X_i = X - Y = Z$), tenemos que:

$$Z = \Delta X = 5.20 - 1.10\ m = 4.10\ m \tag{1.21}$$

Luego, la propagación del error es:

$$\delta Z = \delta(\Delta X) = \sqrt{\delta X_f^2 + \delta X_f^2} = \sqrt{0.05^2 + 0.05^2}\, m \approx 0.07\ m \tag{1.22}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$Z \pm \delta Z = \Delta X \pm \delta \Delta X = 4.10 \pm 0.07\ m \tag{1.23}$$

1.4.3. Propagación por multiplicación y división

Si la función Z ahora es el producto o el cociente de las variables independientes X y Y, como muestra:

$$Z = X \cdot Y, \qquad Z = \frac{X}{Y}, \tag{1.24}$$

la incertidumbre relativa (o fraccional) de Z se calcula mediante la suma en cuadratura de las incertidumbres relativas de las variables de entrada. Esto es:

$$\frac{\delta Z}{Z} = \sqrt{\left(\frac{\delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y}\right)^2} \tag{1.25}$$

Consideremos que la función Z ahora representa el área de un rectángulo. Esta se compone de un largo L =10.0±0.1 cm y un ancho W =4.0± 0.1cm. Luego, el área es el largo por el ancho. Usando la ecuación 1.25 tenemos:

$$\frac{\delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\delta W}{W}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.1}{10.0}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{4.0}\right)^2} \approx 0.0269 \tag{1.26}$$

Ahora, el valor de A es 10.0×4.0 cm^2= 40.0 cm^2. Esto implica que la incertidumbre absoluta es:

$$\delta A = A\left(\frac{\delta A}{A}\right) \approx 40.0(0.0269)\, cm^2 \approx 1.076\ cm^2 \tag{1.27}$$

Luego, el área es A =40.0 ±1.076 cm^2. Usando las reglas de cifras significativas, el resultado final del área es A =40.0 ±1.1 cm^2.

1.4.4. Propagación para potencias y constantes

Consideremos el caso en el que hay una multiplicación por una constante de la forma $Z = c \cdot X$, donde c es un valor sin incertidumbre (constante exacta), la incertidumbre absoluta se multiplica por el mismo factor:

$$\delta Z = |c| \cdot \delta X \tag{1.28}$$

En el caso en que hay variables elevadas a una potencia ($Z = X^n$), la incertidumbre relativa en Z es n veces la incertidumbre relativa en X. Esto es:

$$\frac{\delta Z}{Z} = |n| \cdot \frac{\delta X}{X} \tag{1.29}$$

Un ejemplo sencillo de esto es considerar el volumen V de un cubo de lado L. La relación entre ambas es $V = L^3$, por lo que la incertidumbre relativa es:

$$\frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta L}{L} \tag{1.30}$$

1.4.5. Regla general de la propagación

Esta regla es opcional para un nivel introductorio, pero útil en ingeniería avanzada. Para cualquier función compleja $Z = f(X, Y, ...)$ donde las variables son independientes, la incertidumbre (δZ) se calcula usando la fórmula de la derivada parcial (o diferencial total):

$$\delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \delta X\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \delta Y\right)^2 + ...} \tag{1.31}$$

Donde $\partial Z/\partial X$ es la derivada parcial de Z con respecto a X, evaluada en los valores promedios de X e Y. Esta fórmula es la base matemática de todas las reglas anteriores y es esencial para el análisis de errores en funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.
Consideremos que $Z = X^n$ del caso de propagación para potencias. La derivada parcial de Z con respecto a X es $\partial Z/\partial X = nX^{n-1}$. Aplicando la ecuación 1.31, tenemos:

$$\begin{aligned} \delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \delta X\right)^2} = \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \delta X = nX^{n-1}\delta X = n\frac{X^n}{X}\delta X = nZ\frac{\delta X}{X} \\ \implies \frac{\delta Z}{Z} = n\frac{\delta X}{X} \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.5. Representación gráfica y ajuste de datos

La representación gráfica es una herramienta esencial en ingeniería y física para visualizar la relación funcional entre variables y para validar modelos teóricos a partir de datos experimentales.

1.5.1. Gráficos de datos experimentales

Un gráfico correctamente elaborado debe ser una representación clara y completa de la relación entre la variable independiente (x) y la variable dependiente (y).
Cada eje debe tener un rótulo que indique la magnitud física que representa y sus unidades (ej: "Tiempo (t) en segundos (s)"). Además, las escalas deben elegirse de modo que los datos ocupen la mayor parte del espacio del gráfico.
En términos de presentación, el gráfico debe tener un título conciso que explique la relación que se está mostrando (ej: "Voltaje vs. Corriente para una Resistencia Fija"), mientras que los datos experimentales deben marcarse claramente, a menudo con cruces ($\times$) o círculos.
Las barras de error representan visualmente la incertidumbre absoluta (δx y δy) de cada punto de datos, lo que es un requisito para evaluar la fiabilidad de la medición. De esta forma, una barra vertical indica la incertidumbre en la variable dependiente δy, mientras que una barra horizontal indica la incertidumbre en la variable independiente δx.
También es importante tener en cuenta que el modelo teórico o la curva de ajuste se considera válida si pasa a través o cerca de la mayoría de las barras de error de los puntos.

1.5.2. Regresión lineal

En la mayoría de los experimentos de física, se busca linealizar los datos para validar una relación de la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto. El método de los mínimos cuadrados es la técnica estadística estándar para encontrar la línea que mejor

se ajusta a los puntos de datos, minimizando la suma de los cuadrados de las distancias verticales (residuos) de los puntos a la línea.

Ajuste por mínimos Cuadrados
El ajuste por Mínimos Cuadrados se basa en el principio de que la mejor línea de ajuste es aquella que hace que la suma de los cuadrados de los errores verticales (o residuos) sea lo más pequeña posible.
Para cada punto de dato experimental (x_i, y_i), el residuo (e_i) es la distancia vertical entre el valor medido (y_i) y el valor predicho $(\hat{y}_i)$ por la línea de ajuste $y = mx + b$ en esa misma coordenada x_i. Es decir, que el residuo es:

$$\text{Residuo} = e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (mx_i + b) \tag{1.33}$$

Si simplemente sumáramos los residuos $(\sum e_i)$, los errores positivos (puntos por encima de la línea) se cancelarían con los errores negativos (puntos por debajo de la línea). Para evitar esta cancelación y asegurar que todos los errores contribuyan a la penalización, se elevan al cuadrado antes de sumarlos. Esto nos permite definir una función objetivo de minimización (S), conocida como la suma de cuadrados de los errores o suma de residuos al cuadrado, la cual es:

$$S(m, b) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (mx_i + b))^2 \tag{1.34}$$

con esto, el objetivo del método es encontrar los valores óptimos de la pendiente (m) y el intercepto (b) que hacen que el valor de $S(m, b)$ sea el mínimo absoluto. N es el número de mediciones que se realizan.
Para encontrar los valores de m y b que minimizan la función S, se utiliza el cálculo. Es decir, se toman las derivadas parciales de la función S con respecto a cada parámetro (m y b) y se igualan a cero. Esto es:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \tag{1.35}$$

Resolver este sistema de ecuaciones resulta en las fórmulas que definen los valores de m y b :

$$m = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \tag{1.36}$$

y para el intercepto:

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \tag{1.37}$$

1.5.3. Cálculo de la incertidumbre de la pendiente y el intercepto

El ajuste por mínimos cuadrados no solo proporciona los mejores valores de m y b, sino también sus incertidumbres estadísticas. Para el caso simplificado (donde se asume que solo

y tiene incertidumbre δy y es la misma para todos los puntos, siendo igual a σ_y), la incertidumbre de la pendiente δm es

$$\delta m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} \tag{1.38}$$

Esta es la incertidumbre combinada de la pendiente, mientras que la incertidumbre del intercepto δb es:

$$\delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N\sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}} \tag{1.39}$$

Donde σ_y es la desviación estándar de los residuos (la dispersión promedio de los puntos alrededor de la línea de mejor ajuste):

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum (y_i - (mx_i + b))^2} \tag{1.40}$$

Luego, el resultado final se reporta como: $m \pm \delta m$ y $b \pm \delta b$.

1.5.4. Simplificaciones útiles

Cuando un sistema tiene pocas mediciones, se pueden realizar aproximaciones que vuelven más ligeros los cálculos (como la mostrata en la ecuación 1.16). Para esto definiremos la incertidumbre típica combinada (u_c), la cual representa la incertidumbre estándar total de un resultado de medición. Se obtiene combinando las incertidumbres estándar de todos los componentes que influyen en el resultado, tanto las obtenidas por métodos estadísticos (Tipo A) como las estimadas por otros medios (Tipo B).
La incertidumbre típica combinada para un resultado de medición y que depende de varias cantidades de entrada x_i (donde $i = 1, 2, \ldots, N$) con incertidumbres típicas $u(x_i)$ se calcula utilizando la ley de propagación de incertidumbres simplificada, donde las contribuciones u_i son independientes (no correlacionadas):

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \tag{1.41}$$

En el caso específico de combinar solo dos componentes de incertidumbre, u_A (ecuación 1.16) y u_B (1.17), independientes, la fórmula se simplifica a:

$$\boxed{u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}} \tag{1.42}$$

Ejercicio resuelto
Consideremos que realizamos mediciones para determinar la constante elástica k de un muelle o resorte (más detalle puede verse en la sección 4.2 o en sección 6). Este sistema corresponde a una masa suspendida en el extremo inferior de un resorte. Usa una aproximación estática y luego otra dinámica para aplicar la estadística y encontrar dicha constante.

R: En equilibrio dinámico, la masa ha elongado el muelle o resorte una cantidad Δx con respecto a su largo natural x_0 (largo sin la masa). La fuerza elástica, como muestra la ecuación 4.8, es $F = -k\Delta x$. Esta es negativa porque apunta en la dirección opuesta al elongamiento. En este caso definiremos positivo a las fuerzas que apuntan hacia arriba. La única fuerza que actúa hacia abajo es el peso y se define como mg, donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y tiene un valor aproximado de 9. 80665 $m/s^2$2. Como el sistema está en equilibrio, la suma de las fuerzas es igual a cero. Es decir:

$$-k\Delta x + mg = 0 \Longrightarrow k = \frac{mg}{\Delta x} \tag{1.43}$$

De aquí notamos que la constante elástica solo depende de la masa y de la elongación: $k = k(m, \Delta x) = Z$. Como ambas variables se pueden medir, significa que cada una de ellas debe tener un error asociado.
La incertidumbre δk se puede obtener usando la ecuación 1.31 al considerar las derivadas con respecto a las únicas dos variables a medir como es la masa y la elongación. Esto es

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}\cdot \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta x}\cdot \delta \Delta x\right)^2} \tag{1.44}$$

Ahora procedemos a realizar las derivadas de la constante elástica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{mg}{\Delta x}\right) = \frac{g}{\Delta x} \quad &\Longrightarrow \frac{\partial k}{\partial m}\delta m = \frac{g}{\Delta x}\delta m \\ \frac{\partial k}{\partial \Delta x} &= \frac{\partial}{\partial \Delta x}\left(\frac{mg}{\Delta x}\right) = -\frac{mg}{\Delta x^2} \quad &\Longrightarrow \frac{\partial k}{\partial \Delta x}\delta \Delta x = -\frac{mg}{\Delta x^2}\delta \Delta x \end{aligned} \tag{1.45}$$

Luego, la incertidumbre del muelle es:

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{g}{\Delta x}\delta m\right)^2 + \left(-\frac{mg}{\Delta x^2}\delta \Delta x\right)^2} \tag{1.46}$$

Consideremos que tenemos una masa de 50 gramos y una elongación $\Delta x = 3.1\ cm$. Tomaremos la incertidumbre como $\delta m = 1$ gramo y $\delta \Delta x$ =0.5 mm. En unidades de kilogramos y metros estos son m= 0.050 kg, $\delta m = 0.001\ kg$, Δx= 0.031 m y $\delta \Delta x = 0.0005\ m$. Con esto podemos calcular el valor de la constante elástica reemplazando los valores en la ecuación 1.43:

$$k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{(0.050\ kg)(9.80665\ m/s^2)}{0.031\ m} = 15.817177...\ \frac{N}{m} \tag{1.47}$$

Ahora vemos qué ocurre con las cifras significativas. En la multiplicación y la división, el resultado debe tener el mismo número de cifras significativas que el factor que tenga la menor cantidad de C.S.En este caso, la menor cantidad de C.S. es 2, determinada por 0.050 kg y 0.031 m. Esto implica que el resultado exacto debe redondearse a 2 cifras significativas. Vemos que las dos primeras cifras son 1 y 5 mientras que el tercer dígito es 8. Como $8 \geq 5$, redondeamos la segunda cifra hacia arriba. Es decir, que

$$k \approx 16\,\frac{N}{m} \tag{1.48}$$

Ahora calculamos la incertidumbre δk al reemplazar los valores en 1.46:

$$\begin{aligned}\delta k &= \sqrt{\left(\frac{g}{\Delta x}\delta m\right)^2 + \left(-\frac{mg}{\Delta x^2}\delta \Delta x\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9.80665\ m/s^2}{0.031\ m}0.001\ kg\right)^2 + \left(\frac{(0.050\ kg)(9.80665\ m/s^2)}{(0.031\ m)^2}0.0005\ m\right)^2} \\ &= 0.40639548...\frac{N}{m}\end{aligned} \tag{1.49}$$

Ahora, aplicando las reglas estrictas de cifras significativas (limitado por 0.001 kg y 0.0005 m que solo tienen 1 CS), tenemos que el resultado es:

$$\delta k = 0.4\ \frac{N}{m} \tag{1.50}$$

Luego, el valor de la constante elástica para este método estático es:

$$k = (16 \pm 0.4)\,\frac{N}{m} \tag{1.51}$$

Pasando a la parte dinámica, ahora tenemos una configuración donde el sistema masa-muelle oscila en conjunto. Esto determina una frecuencia (angular) de oscilación ω, la cual se puede relacionar con la constante elástica por medio de la ecuación 6.12 ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m'}}$). Como el período se relaciona con la frecuencia angular por medio de la relación $\omega = 2\pi/T$ (ecuación 3.63), tenemos que:

$$\frac{k}{m'} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Longrightarrow m' = \left(\frac{k}{4\pi^2}\right)T^2 \tag{1.52}$$

Si consideramos que en la realidad el muelle si tiene una masa no despreciable, podemos separar m' en una parte asociada a la masa que cuelga m (masa a medir) y otra que es la masa del muelle m_{ef}. Esto es: $m' = m + m_{ef}$. Luego reemplazando tenemos:

$$m = \left(\frac{k}{4\pi^2}\right)T^2 - m_{ef} \tag{1.53}$$

Aquí notamos que si realizamos el cambio de variable $x = T^2$ además de $y = m$, podemos reescribir esta ecuación como si fuera una ecuación lineal:

$$y = px + b \tag{1.54}$$

donde $p = \frac{k}{4\pi^2}$ es la pendiente y $b = -m_{ef}$ el intercepto.
Supongamos que tenemos cuatro mediciones de diferentes masas. En cada medición consideramos el tiempo que toma en oscilar 20 veces. Es decir, que elongamos la masa con el muelle y contamos las veces que la masa pasa por el mismo punto (hasta que sean 20 veces). Con esto tenemos un tiempo que llamaremos t_{20}. Note que este tiempo tendrá una incertidumbre δt_{20}. Luego, el período de oscilación lo definiremos como el promedio de esas veinte oscilaciones. Es decir $T = t_{20}/20$. Como el factor $1/20$ es una constante, podemos usar la fórmula de la incertidumbre dada por la ecuación 1.28. Es decir que $\delta T = \frac{1}{20}\delta t_{20}$. Adicionalmente, para realizar la correlación lineal, tenemos que encontrar la variable T^2 y su incertidumbre. Consideremos que $Z = Z(T) = T^2$. La derivada parcial es $\partial Z/\partial T = 2T$. Multiplicando por δT y usando la ecuación general de la incertidumbre dada en 1.31 tenemos:

$$\delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\delta T\right)^2} = \sqrt{(2T\delta T)^2} = 2T\delta T \Longrightarrow \delta(T^2) = 2T\delta T = \frac{1}{10}T\delta t_{20} \tag{1.55}$$

Imaginemos que tenemos 4 masas de 50, 100, 150 y 200 gramos que demoran 7.36, 10.17, 12.36 y 14.22 segundos en completar 20 oscilaciones. Note que todas tienen una incertidumbre de $\pm$ 0.01 s. Como definimos que el período para una oscilación es el total dividido por 20, tenemos que la incertidumbre del período es $\delta T = \pm$ 0.0005 s. Su cifra significativa (el 5) se encuentra en la cuarta posición decimal. Por lo tanto, todos los valores del periodo T deben redondearse o expresarse hasta la cuarta posición decimal, incluso si el cálculo exacto da menos decimales (se añaden ceros, como en $0.368 \rightarrow 0.3680$). Con esto tenemos que los valores del período para cada masa son T_1=7.36 / 20 = 0.3680 s, T_2=10.17 / 20 = 0.5085 s, T_3 =12.36 / 20 = 0.6180 s y T_4=14.22 / 20 = 0.7110 s.
Para el cuadrado del período (redondeado a 4 decimales) tenemos que T_1^2=0.1354 s^2, T_2^2=0.2586 s^2, T_3^2= 0.3819 s^2 y T_4^2=0.5055 s^2. Ahora notamos que, como el período es diferente para cada masa, la incertidumbre $\delta(T^2)$ dada por la ecuación 1.55 también será diferente para cada masa. Esto es $\delta(T_1^2) = 2T_1\delta T$ =2(0.3680)(0.0005)=0.0004 s^2, $\delta(T_2^2) = 2T_2\delta T$ =2(0.5085)(0.0005)=0.0005 s^2, $\delta(T_3^2) = 2T_3\delta T$ =2(0.6180)(0.0005)=0.0006 s^2 y finalmente $\delta(T_4^2) = 2T_4\delta T$ =2(0.7110)(0.0005)=0.0007 s^2. Todos estos datos se pueden ver mejor en la siguiente tabla:

Medida	$m \pm \delta m$ (g)	$t \pm \delta t$ (s)	$T \pm \delta T$ (s)	$T^2 \pm \delta(T^2)$ (s^2)
1	50±1	7.36 ± 0.01	0.3680 ± 0.0001	0.1354 ± 0.0004
2	100±1	10.17 ± 0.01	0.5085 ± 0.0001	0.2586 ± 0.0005
3	150±1	12.36 ± 0.01	0.6180 ± 0.0001	0.3819 ± 0.0006
4	200±1	14.22 ± 0.01	0.7110 ± 0.0001	0.5055 ± 0.0007

Esta tabla nos hace ver con mayor claridad que la incertidumbre del cuadrado del período aumenta a medida que consideramos masas más grandes. Este es un punto importante a

considerar ya que estos muelles sostienen masas mayores, lo que significa que la fuerza ejercida tiene menor influencia para mover masas más grandes (la fuerza del muelle solo depende de la constante elástica y el desplazamiento inicial). Luego, mayor masa significa mayores tiempos pues se requiere más tiempo para que una fuerza menor pueda desplazar una masa grande.
Con la tabla procedemos a realizar al análisis estadístico. La regresión se realizará sobre los pares de puntos (x_i, y_i), donde $x_i = T_i^2$ e $y_i = m_i$. Para los cálculos de mínimos cuadrados, es mejor usar las masas en la unidad base del SI, kilogramos (kg).
Podemos obtener los resultados crudos de la regresión lineal al considerar una serie de ecuaciones fundamentales. Para esto utilizaremos las fórmulas de mínimos cuadrados donde $N = 4$, el cual representa el número de puntos. Estas ecuaciones son:

$$\sum x_i = 1.2814 \ s^2$$

$$\sum y_i = 0.500 \ kg$$

$$\sum x_i^2 = 0.47055 \ s^4$$

$$\sum x_i y_i = 0.197995 \ kg \cdot s^2$$

Con estos datos podemos calcular la pendiente usando la ecuación 1.36:

$$p = \frac{N\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{4(0.191015) - (1.2814)(0.500)}{4(0.48658) - (1.2814)^2} \approx 0.40536... \ \frac{kg}{s^2} \tag{1.56}$$

Para el intercepto tenemos la ecuación 1.36:

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{N\sum x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \frac{(0.500)(0.48658) - (1.2814)(0.191015)}{4(0.48658) - (1.2814)^2} \approx -0.004934... \ kg \tag{1.57}$$

Ahora debemos realizar el análisis de las incertidumbres. En especial, el cálculo de u_c el cual depende de u_A y u_B (ecuación 1.42). Como este experiencia de laboratorio consta de pocas mediciones, usamos la aproximación de u_A dada en 1.16.

1.5.5. Coeficiente de determinación

Una de las cantidades más usadas en estadísticas es el coeficiente de determinación (R^2) es una medida estadística que cuantifica qué tan bien la línea de regresión modela la relación entre las variables. Esta se expresa matemáticamente como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - (mx_i + b))^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \tag{1.58}$$

Este coeficiente toma valores entre 0 y 1, siendo los cercanos a 1 (ej. 0.99) los que indican que la línea se ajusta excelentemente a los datos, lo que implica que el modelo lineal es una

muy buena descripción de la relación física observada. Un valor de R^2 cercano a 0 indica que el modelo lineal no es apropiado, sugiriendo que la relación física puede ser no lineal o que los datos tienen una dispersión excesiva.

Capítulo 2

Movimientos y coordenadas

En los capítulos iniciales de cualquier estudio de la física, la primera tarea es establecer un lenguaje preciso para describir dónde están las cosas y cómo se mueven. Antes de preguntar por qué un objeto se mueve (la Dinámica), primero debemos saber cómo se mueve (la Cinemática).
Este capítulo es el pilar de la Cinemática. Su objetivo es proporcionar el andamiaje conceptual y matemático necesario para cuantificar el movimiento en el espacio. Específicamente, la posición de una partícula o un cuerpo describe el lugar que ocupa en el espacio en un instante de tiempo. Matemáticamente, la posición se representa como un vector $\vec{r}(t)$ que indica la localización respecto a un sistema de referencia en un tiempo t.

2.1. Posición y movimiento

En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, el vector de posición $\vec{r}$ se puede expresar como:

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}} \tag{2.1}$$

donde x, y, z son las coordenadas del objeto en función del tiempo, e $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ son los vectores unitarios de los ejes cartesianos.
El desplazamiento entre dos instantes t_1 y t_2 es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \tag{2.2}$$

Esto significa que el espacio recorrido (distancia total) no es un vector, sino una magnitud escalar que corresponde a la longitud del camino seguido.

Esto se puede ver en la Figura 2.1, donde se fija un centro u observador. A partir de deste punto se dibuja un vector (flecha azul) hasta el punto negro en P_1 el cual indica el lugar de dicho punto para un tiempo t_1. Al cabo de un tiempo, el vector posición se traslada hasta

P_2 en un tiempo t_2. Esta nueva posición se denota por $\vec{r}(t_2)$. La diferencia entre estos puntos ($\Delta\vec{r}$) se indica como el vector que parte de P_1 hasta P_2.

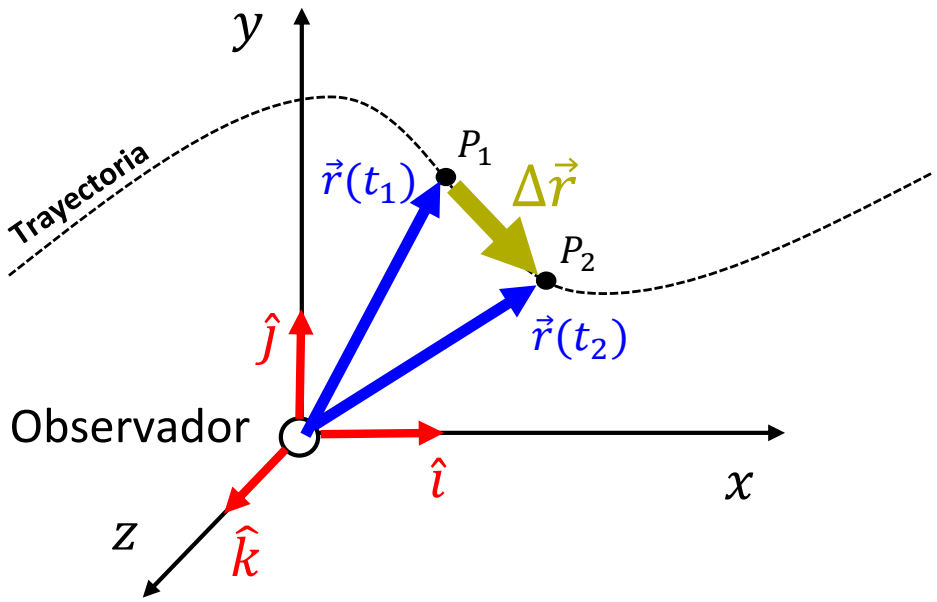


Figura 2.1: Representación del movimiento un punto (trayectoria denotada por la curva segmentada negra) por medio de vectores.

Ejercicio resuelto
Un auto se mueve en línea recta a lo largo del eje x. En el instante $t = 0$ se encuentra en la posición x_0 =10 m. Su posición en función del tiempo viene dada por:

$$x(t) = 10 + 5t \;\; m \tag{2.3}$$

donde t está en segundos y $x(t)$ en metros.
1. Determine la posición del auto en $t = 4 \;\; s$.
R: Para encontrar la solución, solo basta reemplazar el tiempo en la ecuación 2.3:

$$x(t) = 10 + 5 * 4 \;\; m = 30 \;\; m \tag{2.4}$$

2. Calcule el desplazamiento entre $t = 2s$ y $t = 5s$. **R:** El desplazamiento es la diferencia de posiciones en tiempos diferentes, esto es, entre 2 y 5 segundos:

$$\Delta x(t) = x(5) - x(2) = [10 + 5 * 5] - [10 + 5 * 2] \;\; m = 35 - 20 \;\; m = 15 \;\; m \tag{2.5}$$

3. ¿Cuál es la distancia recorrida en ese intervalo?

R: Como el movimiento es en línea recta y sin cambios de dirección, la distancia recorrida coincide con el desplazamiento: $d = 15 \ \ m$.

2.2. Velocidad media y Velocidad instantánea

La velocidad media en física se define como el desplazamiento total de un objeto dividido por el tiempo total empleado en ese desplazamiento. Es una cantidad vectorial, lo que significa que tiene tanto magnitud (rapidez) como dirección. En otras palabras, la velocidad media indica qué tan rápido se mueve un objeto y en qué dirección lo hace, promediando su movimiento sobre un período de tiempo. Se define matemáticamente como:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{2.6}$$

Por otro lado, la velocidad instantánea en física es la velocidad de un objeto en un momento específico, es decir, la velocidad en un punto particular de su trayectoria. Se diferencia de la velocidad media, que es el promedio de la velocidad a lo largo de un intervalo de tiempo. La velocidad instantánea se puede entender como la velocidad que tendría un objeto si su movimiento fuera constante durante un intervalo de tiempo infinitesimalmente pequeño. Se define como el límite de la velocidad media:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \tag{2.7}$$

Visualmente, la derivada corresponde aun caso límite de un desplazamiento dividido por el tiempo. El resultado se muestra en la Figura 2.2. Como se observa, dos posiciones muy cercanas (dadas por P_1 y P_2) generan dos vectores de posición muy cercanos entre sí. No obstante, al dividir el desplazamiento $\Delta\vec{v}$ por el tiempo que le toma al punto recorres este desplazamiento, se genera un vector que llamamos velocidad instantánea $\vec{v}$ (flecha verde en Figura 2,2).
Esta expresión permite escribir la posición de manera integral, de la forma:

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \longrightarrow \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r}' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt' \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt' \tag{2.8}$$

Ejercicio resuelto
Un ciclista se mueve en una carretera recta de acuerdo a la función de posición:

$$x(t) = 5t^2 + 2t \ \ m \tag{2.9}$$

donde t es en segundos.
1. Calcular la velocidad media entre t igual a 2 y 3 segundos.

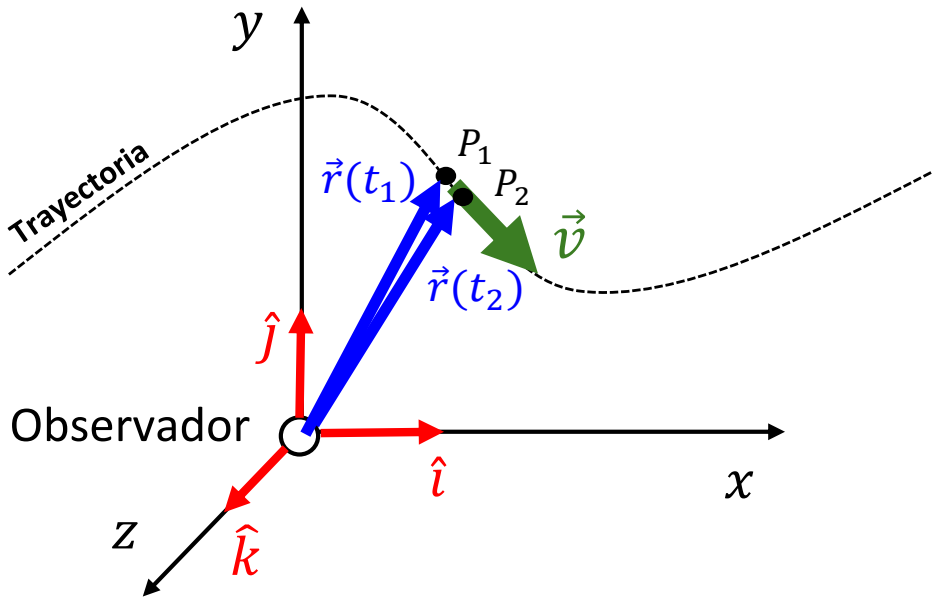


Figura 2.2: Representación de una derivada de la posición con vectores. La flecha verde ahora indica la velocidad de la partícula que la llevó desde el punto P_1 hasta un punto P_2 casi inmediatamente junto al punto inicial.

R: Como el movimiento ocurre en una sola dirección, la ecuación 2.6 es

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{x(3)\hat{i} - x(2)\hat{i}}{3-2 \;\; s} = [5(3)^2 + 2(3)] - [5(2)^2 + 2(2)] \;\; \frac{m}{s}\hat{i} = 51 - 24 \;\; \frac{m}{s}\hat{i} = 27 \;\; \frac{m}{s}\hat{i} \tag{2.10}$$

La velocidad media del intervalo es 27 m/s en la dirección $\hat{i}$.
2. Calcular la velocidad instantánea en $t = 3 \;\; s$. Para esto tenemos que derivar la posición con respecto al tiempo. Es decir, derivar la ecuación 2.9:

$$\vec{v}(t=3) = \frac{d\vec{r}(t=3)}{dt} = \frac{dx(t=3)}{dt}\hat{i} = 10(t=3) + 2 \;\; \frac{m}{s}\hat{i} \;\; = 30 \;\; \frac{m}{s}\hat{i} \tag{2.11}$$

Lo que muestra que la velocidad instantánea es diferente de la velocidad media. De hecho, la velocidad aumenta linealmente con el tiempo, indicando que, mientras más tiempo pase, mayor será la velocidad instantánea.

2.3. Aceleración instantánea

La aceleración instantánea, en física, es la derivada de la función de velocidad con respecto al tiempo. En otras palabras, es la tasa de cambio de la velocidad en un instante específico.

Matemáticamente, si tenemos una función de velocidad $\vec{v}(t)$, la aceleración instantánea $\vec{a}(t)$ se calcula como la derivada de $\vec{v}(t)$ con respecto a t:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \tag{2.12}$$

Esto significa que la aceleración instantánea es la pendiente de la curva de velocidad en un punto dado en el tiempo.
De forma análoga a la ecuación 2.8, se puede escribir la velocidad instantánea en función de la aceleración como:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt' \tag{2.13}$$

Ejercicio resuelto
1. Calcule las aceleraciones de ambos problemas anteriores.

R: Para el caso de la primera posición, basta con derivar temporalmente en dos ocasiones a la ecuación 2.3. Esto es:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d(10 + 5t \;\; m)}{dt}\right)\hat{i} = \frac{d}{dt}\left(5 \;\; \frac{m}{s}\right)\hat{i} = 0 \;\; \frac{m}{s^2}\hat{i} \tag{2.14}$$

Para el segundo ejercicio, ya tenemos la velocidad dada por la ecuación 2.11. Solo basta con volver a derivar:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(10t + 2 \;\; \frac{m}{s}\right)\hat{i} = 10 \;\; \frac{m}{s^2}\hat{i} \tag{2.15}$$

Estos resultados ilustran que la aceleración es diferente para el automóvil y el ciclista.

2.4. Movimiento uniformemente acelerado

El movimiento uniformemente acelerado se define como aquel movimiento en el que la aceleración de un objeto permanece constante (tanto en magnitud como en dirección) a lo largo del tiempo. Esto significa que el término al interior de la integral en la ecuación 2.13 es constante. Esto es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \int_{t_1}^{t} dt' \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \Delta t} \tag{2.16}$$

donde $\vec{v}_0$ es una constante. Ahora, integrando para obtener la posición, como muestra la ecuación 2.8, tenemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt' = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}_0\Delta t)dt'$$
$$\Longrightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2} \tag{2.17}$$

Sin consideramos una aceleración hacia abajo (dirección de la aceleración de gravedad) $\vec{g} = -g\hat{k}$ y un $t_0 = 0 \ \ s$, tenemos la ecuación para la posición de un cuerpo siendo afectado por la gravedad:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{k} \tag{2.18}$$

En cada una de sus direcciones, esta ecuación se descompone en:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \dot{x}_0 t \\ y(t) &= y_0 + \dot{y}_0 t \\ z(t) &= z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde el subíndice 0 representa una constante y el punto superior denota la derivada temporal (velocidad inicial).

Para el caso de un movimiento de aceleración igual a cero, tenemos que la velocidad es constante. Como la velocidad constante implica que para un mismo rango temporal un objeto recorre la misma distancia siempre. No obstate, para el caso de un movimiento acelerado (constante distinto de cero en este caso), tenemos que para mismos intervalos temporales existirá una distancia recorrida que es cada vez mayor. Esto se puede visualizar en la Figura 2.3.

Ejercicio resuelto
Un automóvil parte del reposo y acelera a $a = 3 \ \ m/s^2$ durante $t = 8s$. Después, mantiene velocidad constante durante $5s$.
1. Calcular la velocidad final después de la aceleración.

R: Para calcular la velocidad final, tenemos que usar la ecuación 2.16. Consideremos que, si parte del reposo, significa que su velocidad inicial es cero:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{a}_0\Delta t = 0\hat{i} + \left(3 \ \ \frac{m}{s^2}\right)(8 \ \ s)\hat{i} = 24 \ \ \frac{m}{s}\hat{i} \tag{2.20}$$

2. Obtener la distancia recorrida durante la aceleración.

R: La posición se calcula usando la ecuación 2.17 y usando los datos que fueron entregados. Aquí se considerará que la posición inicial es cero metros:

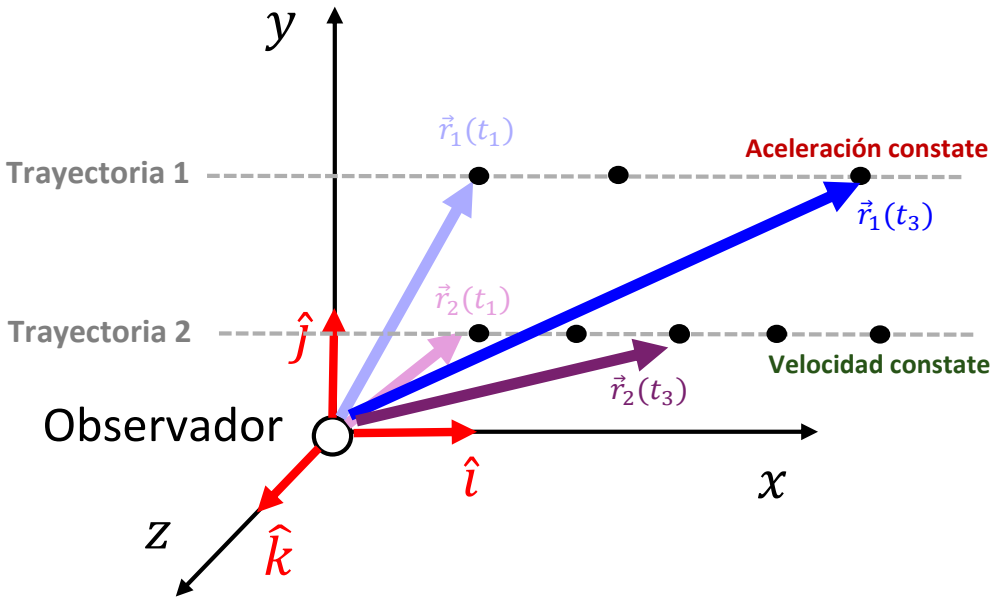


Figura 2.3: Dos partículas moviendose hacia la derecha. La primera se mueve con una velocidad constante (trayectoria 2), mientras que la segunda con una aceleración constante distinta de cero (trayectoria 1). Se observa que para iguales intervalos de tiempo el desplazamiento total de un movimiento acelerado es mayor.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 = 0\hat{i} + 0(8\ \ s)\hat{i} + \frac{1}{2}\left(3\ \ \frac{m}{s^2}\right)(8\ \ s)^2\hat{i} = 96\ \ m\ \ \hat{i} \tag{2.21}$$

3. Distancia total incluyendo el tramo de velocidad constante.

R: Al final de la fase de aceleración, el sistema se mueve con una velocidad que es diferente de cero, la cual se calculó en la ecuación 2.20. Es decir, la velocidad final de la fase de aceleración es la velocidad de la fase sin aceleración. Para calcular la posición final, volvemos a usar la ecuación 2.17, pero con aceleración igual a cero y la posición inicial igual a la posición final de la fase de aceleración ($x_0 = 96\ m$):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}_1\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 = 96\ \ m\hat{i} + \left(24\ \ \frac{m}{s}\right)(5\ \ s)\hat{i} + \frac{1}{2}(0)(5\ \ s)^2\hat{i} = 216\ \ m\ \ \hat{i} \tag{2.22}$$

Ejercicio resuelto

Considere una pelota que cae y toca el suelo con una velocidad $-V\hat{k}$ y se despega del suelo con una velocidad V', que se relaciona con V por la relación $V' = r_0V$, donde r_0 es el coeficiente

de restitución (con valores $0 < r_0 < 1$). Si inicialmente la partícula tiene una velocidad V_0 y cada vez que sigue golpeando el suelo tiene velocidades V_1, V_2, V_3, ..., respectivamente.
1. Determinar el instante en que ocurre el n-ésimo rebote.

R: Para un tramo vertical ascenso (desde que parte del suelo hasta que llega a su valor máximo h_{max}) si la velocidad inicial hacia arriba en ese tramo es V la duración del vuelo es (ecuación 2.16):

$$V_{max} = V_0 - g\Delta t \tag{2.23}$$

Sin embargo, la velocidad en la altura máxima es cero ($V_{max} = 0$) por lo que $g\Delta t = V_0$. Sin embargo, el tiempo de la caída es el mismo que el de la subida, por lo que el delta de tiempo entre subida y caída es:

$$\Delta t = \frac{2V_0}{g} \tag{2.24}$$

Aquí notamos que tras el primer impacto la velocidad con la que deja el suelo (hacia arriba) es $V_1 = r_0 V_0$, mientras que tras el segundo impacto la velocidad con la que sale es $V_2 = r_0 V_1 = r_0^2 V_0$. Esto nos permite generalizar de la forma:

$$V_k = r_0^k V_0, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, ... \tag{2.25}$$

El tiempo total del n-ésimo rebote, t_n, es la suma de los tiempos de todos los vuelos anteriores:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2V_k}{g} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2r_0^k V_0}{g} = \frac{2V_0}{g} \sum_{k=1}^{n-1} r_0^k \tag{2.26}$$

Aquí notamos la forma del lado derecho, el cual corresponde a la suma geométrica parcial, la cual se define como: $\sum_{m=1}^{N} r^m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$, para un $r < 1$, lo cual es la condición de este problema. Con esto, podemos reescribir esta ecuación como:

$$t_n = \frac{2V_0}{g} \sum_{k=1}^{n-1} r_0^k = \frac{2V_0}{g} \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} \rightarrow t_n = \frac{2V_0}{g} \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} \tag{2.27}$$

2. Demostrar que el tiempo total t_* de los infinitos rebotes es finito.

R: Para encontrar este tiempo, hacemos tender el n de la ecuación 2.27 a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2V_0}{g} \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} = \frac{2V_0}{g(1 - r_0)} \lim_{n\to\infty} (1 - r_0^n) = \frac{2V_0}{g(1 - r_0)} \Longrightarrow t_* = \frac{2V_0}{g(1 - r_0)} \tag{2.28}$$

Note que r_0 es menor que uno (condición física) por tanto podemos escribirlo como $r_0 = 1/z$, con z mayor que 1. Luego, al hacer r_0^n tenemos que también se puede escribir como $1/z^n$. Así, cuando $n \rightarrow \infty$, sucede que este término se va haciendo cada vez más pequeño y por tanto, despreciable.
Esto muestra que la partícula realiza infinitos rebotes en un tiempo finito.

3. Relación entre n y $t_* - t_n$.

R: Calculamos la diferencia entre el tiempo límite y el tiempo del n-ésimo impacto usando la expresión de t_n (ecuación 2.28):

$$t_* - t_n = \frac{2V_0}{g(1-r_0)} - \frac{2V_0}{g}\frac{1-r_0^n}{1-r_0} = \frac{2V_0}{g}\frac{r_0^n}{1-r_0} = t_* r_0^n \tag{2.29}$$

Despejando, tenemos que:

$$r_0^n = \frac{t_* - t_n}{t_*} = A_t \rightarrow n = \frac{\ln(A_t)}{\ln r_0} \tag{2.30}$$

2.5. Elementos de línea, área y volúmen en coordenadas cilíndricas y esféricas

En física y matemáticas, cuando queremos integrar magnitudes distribuidas en el espacio (densidad de masa, carga eléctrica, flujo de calor, etc.), necesitamos expresar los elementos diferenciales de línea($d\vec{l}$), área ($d\vec{A}$) y volumen (dV) en el sistema de coordenadas más conveniente.

Coordenadas cilíndricas
Este sistema de coordenadas es una extensión de las coordenadas polares en 2D al espacio 3D. Un punto se define por la distancia radial desde el eje $z(r)$, el ángulo con respecto al eje $x(\theta)$, y la altura sobre el plano $xy(z)$. Para definir estos elementos, consideramos un pequeño çuboçilíndrico. Sus "lados"son:

- Elemento de línea radial (dr): Es un cambio infinitesimal en la distancia radial.
- Elemento de línea azimutal ($rd\theta$): Es la longitud de un arco infinitesimal a un radio r.
- Elemento de línea vertical (dz): Es un cambio infinitesimal en la altura. Este es el mismo elemento del sistema coordenado cartesiano.

Con esto tenemos que el elemento de línea es:

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + z\hat{z} \tag{2.31}$$

Para calcular la longitud de un elemento de línea (dl) en coordenadas cilíndricas, basta con realizar:

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + z^2} \tag{2.32}$$

Hay tres elementos de área, los cuales son:

- Área radial (dA_r): Un área perpendicular al vector de posición radial (cambio en la vertical). Se forma por los cambios en θ y z: $dA_r = (rd\theta)(dz)$.

- Área tangencial (dA_θ): Un área perpendicular al vector tangencial (también es un área vertical). Se forma por los cambios en r y z. $dA_\theta = (dr)(dz)$.

- Área horizontal (dA_z): Un área perpendicular al eje z (ocurre en el plano xy). Se forma por los cambios en r y θ y corresponde a: $dA_z = (dr)(rd\theta)$

El elemento de volumen (dV) es el producto de los tres elementos de línea ortogonales:

$$dV = (dr)(rd\theta)(dz) = rdrd\theta dz \tag{2.33}$$

Coordenadas esféricacs

De manera análoga, se define el elemento de línea usando los elementos radiales (dr), elemento polar ($rd\theta$) y azimutal ($r\sin(\theta)d\phi$) como:

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin(\theta)d\phi))^2} \tag{2.34}$$

El área radial dA_r, polar dA_θ y azimutal dA_ϕ son:

$$dA_r = (rd\theta)(r\sin(\theta)d\phi), \quad dA_\theta = (dr)(r\sin(\theta)d\phi), \quad dA_\phi = (dr)(rd\theta) \tag{2.35}$$

mientras que su área de volumen es:

$$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin(\theta)d\phi) = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi \tag{2.36}$$

En la Figura 2.4 se observan los elementos de volumen de un cubo, un cilindro y una esfera. Estos representan pequeños elementos o bloques de contrucción que permiten generar la figura geométrica completa. Para el caso del cubo se necesitan pequeños cubos de dimensiones dx, dy y dz. En cambio, los bloques de construccuón para el cilindro y la esfera don diferentes ya que no bastan con pequeños bloques cúbicos. En este caso se requieren de bloques que hereden la curvatura propia del cilindro y de la esfera. Esto hace que los elementos ya no sean simplemente las del cubo sino que haya que imponer correcciones, como las presentadas en la ecuación 2.33 y en 2.36.

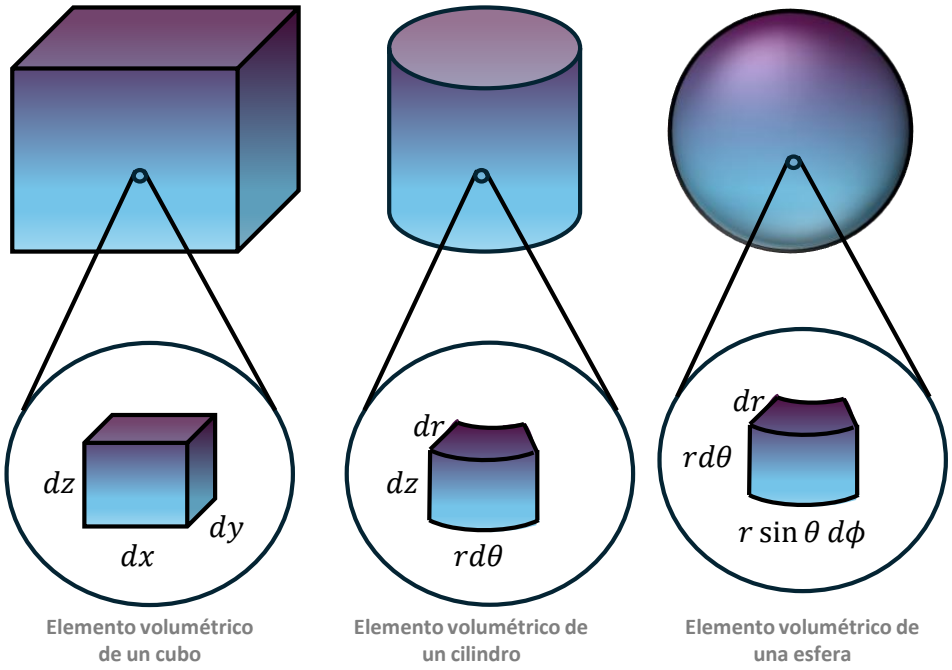


Figura 2.4: Vista de los elementos de volumen para figuras geométricas comunes: cubo, cilindro y esfera

2.6. Velocidad angular

La velocidad angular (ω) es una medida de la rapidez con la que un objeto rota o gira alrededor de un eje. Es una magnitud vectorial que indica la tasa de cambio del ángulo (θ) con respecto al tiempo (t). La dirección del vector de velocidad angular se determina por la regla de la mano derecha: si los dedos de tu mano derecha se curvan en la dirección de la rotación, el pulgar extendido apunta en la dirección de la velocidad angular. Se mide en radianes por segundo (rad/s) en el Sistema Internacional de Unidades. Es un concepto fundamental en la descripción de movimientos circulares y rotacionales.
Matemáticamente se define como:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1}{t_2 - t_1} \tag{2.37}$$

Para un movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante y se relaciona con el período (T) y la frecuencia (f) de la siguiente manera:

$$\omega = \frac{2\pi}{f} \tag{2.38}$$

La relación entre la velocidad lineal o tangencial ($v_\perp$) y la velocidad angular (ω) para un punto que se mueve en un círculo de radio r es:

$$v_\perp = r\omega \tag{2.39}$$

Adicionalmente, se puede establecer una concordancia entre la posición de los objetos en un sistema coordenado y otro en un sistema en rotación. Esto permite escribir las ecuaciones cinemáticas para rotaciones angulares como:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}_0 \Delta t \\ \vec{\theta} &= \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 \Delta t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 \Delta t^2\end{aligned}} \tag{2.40}$$

donde $\vec{\alpha}_0$ es la aceleración angular (constante en este caso). La definición de la aceleración angular es:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} \tag{2.41}$$

Ejercicio resuelto
Consideremos un disco de radio R=0.5 m parte del reposo y experimenta una aceleración angular α_0=4 rad/s^2 durante t=6 s.
1. Calcular la velocidad angular final.

R: Cuando un sistema parte del reposo quiere decir que parte con velocidad igual a cero. Esto es independiente del sistema de referencia o si se usan coordenadas cartesianas o angulares. Esto significa, para este caso, que $\vec{\omega}_0$=$0\hat{\theta}$. Por lo tanto, la velocidad angular se puede calcular directamente usando la ecuación 2.40:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}_0 \Delta t = 0\hat{\theta} + \left(4 \ \ \frac{rad}{s^2}\right)(6 \ \ s)\hat{\theta} = 24 \ \ \frac{rad}{s}\hat{\theta} \tag{2.42}$$

2. Determinar el ángulo total girado en ese lapso de tiempo.

R: Para calcular esto, se requiere usar la segunda ecuación en 2.40, considerando que el disco parte de un ángulo igual a cero ($\theta_0 = 0 \ \ rad$) .

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 \Delta t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 \Delta t^2 = 0 \ \ rad \ \ \hat{\theta} + 0 \ \ \frac{rad}{s} 6 \ \ s \ \ \hat{\theta} + \frac{1}{2}\left(4\frac{rad}{s^2}\right)(6 \ \ s)^2 \ \ \hat{\theta} = 72 \ \ rad \ \ \hat{\theta} \tag{2.43}$$

Esto es equivalente a recorrer unos 4125.3°, o equivalentemente a unas 11.5 vueltas en 6 segundos (casi dos vueltas por segundo).
3. Hallar la velocidad tangencial final en el borde del disco.

R: Esta velocidad se calcula usando la ecuación 2.39:

$$v = r\omega = (0.5 \ m)(24 \ \ \frac{rad}{s}\hat{\theta}) = 12 \ \ \frac{m}{s} \ \ \hat{\theta} \tag{2.44}$$

Note que el radián es una unidad adimensional. Por lo tanto, cuando usamos radianes en física, no se necesita llevar la unidad.

2.6.1. Velocidad angular en función de la posición

El área de un sector circular se define como:

$$A_{circ} = \frac{1}{2}R^2\theta \tag{2.45}$$

Consideremos un cambio infinitesimal en el área (dA_{circ}) debido a un cambio infinitesimal en el ángulo ($d\theta$). Diferenciando la ecuación del área con respecto al ángulo, obtenemos:

$$dA_{circ} = \frac{1}{2}R^2 d\theta \tag{2.46}$$

La versión vectorial del elemento de área proviene de asignar dirección al área usando la normal al plano (regla de la mano derecha):

$$d\vec{A}_{circ} = \hat{n}dA_{circ} \tag{2.47}$$

Geométricamente, el área que barren r y $r + dr$ tiene área vectorial:

$$d\vec{A}_{circ} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} \tag{2.48}$$

Esto proviene de considerar que si $\vec{r}$ gira un ángulo infinitesimal $d\theta$, el extremo de $\vec{r}$ se desplaza tangencialmente $d\vec{r}$ (perpendicular a $\vec{r}$), y el paralelogramo infinitesimal generado por $\vec{r}$ y $d\vec{r}$ tiene área vectorial $\vec{r} \times d\vec{r}$; el sector es la mitad de ese paralelogramo, de ahí el factor 1/2.
Definimos ahora el 'ángulo barrido' vectorial como el área sectorial reducida al radio:

$$d\vec{S} = \frac{2}{r^2}d\vec{A} \tag{2.49}$$

Con esta definición, si el radio es (instantáneamente) r, entonces:

$$|d\vec{S}| = \frac{2}{r^2}|d\vec{A}| = \frac{2}{r^2}\frac{1}{2}r^2 d\theta = d\theta \tag{2.50}$$

Donde se ha usado la definición de $d\vec{A}$ de la ecuación 2.46 con $r = R$. Sustituyendo la ecuación 2.48 en 2.49, tenemos:

$$d\vec{S} = \frac{2}{r^2}d\vec{A} = \frac{2}{r^2}\frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2} \tag{2.51}$$

El cambio angular vectorial con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}{r^2} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \tag{2.52}$$

Ahora bien, esta definición del cambio de ángulo vectorial es lo mismo que la velocidad angular en su versión vectorial. Es por esto que podemos escribir:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}} \tag{2.53}$$

Esta relación es útil por que permite calcular rápidamente la velocidad angular (módulo y sentido) sin pasar a coordenadas polares, las cuales podrían ser más complejas de operar. Como esto representa el desplazamiento de un punto que rota con respecto a un eje central, se puede describir como muestra la Figura 2.5. En esta figura se nota que el producto vectorial $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (flecha gris) es paralelo al vector velocidad $\vec{v}$ que se encuentra en morado.

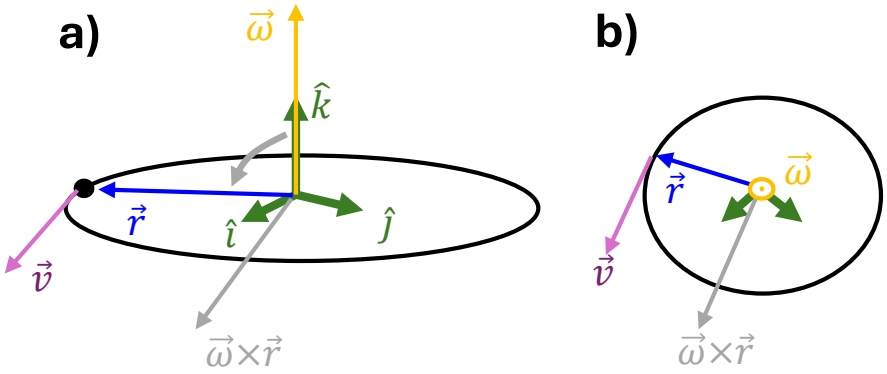


Figura 2.5: Producto vectorial dado por la ecuación 2.53. En la parte a se muestra su vista tridimensional mientras que en la parte b se encuentra su vista superior. Este es el resultado de un producto vectorial.

Con la ecuación 2.53 también podemos despejar la velocidad en función de la posición y la velocidad angular. Para esto, realizamos el siguiente producto cruz:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{r^2} \tag{2.54}$$

Luego, usando la identidad vectorial $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$, tenemos que:

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = r^2\vec{v} \tag{2.55}$$

Esto debido a que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son ortogonales entre sí, por lo que su producto punto es cero y el producto punto de un vector por sí mismo (en este caso $\vec{r}$) es igual al módulo cuadrado. Note que si quiere cambiar el orden de operación (primero el interior del paréntesis), la identidad

se transforma en: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Usando el resultado de 2.55 en la ecuación 2.54 nos queda:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{r^2 \vec{v}}{r^2} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{2.56}$$

Lo cual significa que podemos escribir la velocidad de forma general como esta ecuación para un sistema rotante.
Note que, en términos de componentes, este producto vectorial se escribe como:

$$\boxed{\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_y r_z - \omega_z r_y)\hat{i} - (\omega_x r_z - \omega_z r_x)\hat{j} + (\omega_x r_y - \omega_y r_x)\hat{k}} \tag{2.57}$$

Este producto también se puede escribir como el determinante de la siguiente matriz:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ r_y & r_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_z \\ r_x & r_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ r_x & r_y \end{vmatrix} \hat{k} \tag{2.58}$$

donde los símbolos || representan el determinante (incluyendo a las matrices 2×2), el cual, para una matriz 2×2 es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{2.59}$$

Ejercicio resuelto
Una partícula se mueve en el plano xy con posición:

$$\vec{r}(t) = (3t)\hat{i} + (4t^2)\hat{j}, \qquad t > 0. \tag{2.60}$$

1. Calcule la velocidad angular $\vec{\omega}$.

R: Para esto, consideremos la ecuación 2.53. Esta tiene una velocidad y el modulo al cuadrado de la posición. Es por esto que patimos calculando la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}((3t)\hat{i} + (4t^2)\hat{j}) = 3\hat{i} + 8t\hat{j} \tag{2.61}$$

Por otro lado, el módulo cuadrado de la posición es:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (3t)^2 + (4t^2)^2 = t^2(9 + 16t^2) \tag{2.62}$$

En el plano xy el producto cruz $\vec{r} \times \vec{v}$ tiene sólo componente z: $(\vec{r} \times \vec{v})_z = xv_y - yv_x$. Sustituyendo los valores, tenemos:

$$\vec{r} \times \vec{v} = (xv_y - yv_x)\hat{k} = (3t * 8t - 4t^2 * 3)\hat{k} = (24t^2 - 12t^2)\hat{k} = 12t^2\hat{k} \tag{2.63}$$

Ahora, dividiendo por el módulo cuadrado, tenemos:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{r^2} = \frac{12t^2}{t^2(9+16t^2)}\hat{k} = \frac{12}{9+16t^2}\hat{k} \tag{2.64}$$

2. Verifique que el módulo de $\vec{\omega}$ coincide con $\dot{\theta}$, donde $\theta(t) = \arctan(y/x)$ es el ángulo polar instantáneo.

R: Para verificar esta relación, tomamos la derivada temporal:

$$\frac{\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan(y/x) \tag{2.65}$$

Aquí reemplazamos los valores de x e y:

$$\frac{\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{4t^2}{3t}\right) = \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{4t}{3}\right) \tag{2.66}$$

Aquí consideramos que la derivada del Arcotangente es $\frac{d}{dx}\arctan(a_0x) = \frac{a_0}{1+(a_0x)^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan\left(\frac{4t}{3}\right) = \frac{4/3}{1+(4t/3)^2} = \frac{4}{3(1+\frac{16}{9}t^2)} = \frac{4}{3(\frac{9}{9}+\frac{16}{9}t^2)} = \frac{4}{\frac{1}{3}(9+16t^2)}\\ \implies \dot{\theta}(t) = \frac{12}{9+16t^2} = |\vec{\omega}|\end{aligned} \tag{2.67}$$

3. Descomponga la velocidad en componentes radial y tangencial. Relacione el componente tangencial con ω.

R: Para obtener la compontente radial de un vector, basta con multiplicar el producto punto del vector por $\hat{r}$, el cual es el mismo que $\vec{r}/r$. Con esto, la velocidad radial es $v_r = (\vec{v}\cdot\vec{r})/r$. El numerador es:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = v_x x + v_y y = 3*3t + 8t*4t^2 = t(9+32t^2) \tag{2.68}$$

por lo que la componente radial es:

$$v_r = \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{t(9+32t^2)}{\sqrt{t^2(9+16t^2)}} = \frac{9+32t^2}{\sqrt{9+16t^2}} \tag{2.69}$$

La componente tangencial (perpendicular a $\vec{r}$) puede obtenerse por dos vías; la primera es por multiplicar por el vector unitario $\hat{\theta}$, el cual no disponemos y otra, más práctica es tomando:

$$v_\perp = \frac{|\vec{v}\times\vec{r}|}{r} = \frac{12t^2}{t\sqrt{9+16t^2}} = \frac{12t}{\sqrt{9+16t^2}} \tag{2.70}$$

Esto se puede realizar porque el producto cruz entre un vector y la posición unitaria es $|\vec{u}\times\hat{r}| = |\vec{u}||\hat{r}|\sin(\theta) = |\vec{u}|\sin(\theta)$ (el módulo de un vector unitario es igual a 1). Por lo tanto, cuando los vectores son perpendiculares, θ vale noventa grados (o $\pi/2$), lo que hace que el $\sin(\pi/2) = 1$ y transformando a ese producto en su parte perpendicular $u_\perp$.

Ahora bien, de la ecuación 2.53 sabemos que la velocidad angular es el producto cruz entre la posición y la velocidad dividido por el módulo al cuadrado. De la ecuación 2.70 solo falta dividir por r para que sea equivalente en módulo. Dicho de otra forma, se puede establecer la relación $v_\perp = r\omega$. Multiplicando el módulo de $\vec{\omega}$ dada la ecuación 2.64, tenemos:

$$r\omega = r\frac{12}{9+16t^2} = t\sqrt{9+16t^2}\frac{12}{9+16t^2} = \frac{12t}{\sqrt{9+16t^2}} = v_\perp \tag{2.71}$$

La cual es la misma relación que la encontrada por la velocidad perpendicular.

2.7. Coordenadas y movimiento

Para describir el movimiento de un objeto, es esencial establecer un sistema de coordenadas. Este sistema es un marco de referencia que nos permite especificar la posición del objeto en cualquier instante. Las coordenadas más comunes son las cartesianas (x,y,z), pero para el movimiento circular, las coordenadas polares (r,θ) o cilíndricas (r,θ,z) son a menudo más convenientes.
Dependiendo del sistema de coordenadas, las derivadas que determinan la velocidad y aceleración toman formas distintas.
Como habrás notado, en coordenadas cartesianas tenemos que la velocidad (derivada temporal del vector posición dada por la ecuación 2.1) y la aceleración (segunda derivada) son:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{a} &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \end{aligned} \tag{2.72}$$

Donde $\dot{x} = v_x$ y $\ddot{x} = a_x$.
Sin embargo, para movimientos que ocurren alrededor de un punto fijo (rotación, órbitas), las coordenadas polares (r, θ) son más naturales:

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{2.73}$$

Usando la definición de la posición (ecuación 2.1), y teniendo que:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta), \end{aligned} \tag{2.74}$$

el vector posición se puede escribir como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r(\cos(\theta)\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \Longrightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \tag{2.75}$$

Un vector perpendicular a $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ es un vector $\vec{B}$ el cual se an intercambiado las expresiones y un signo. Es decir $\vec{B} = -A_y\hat{i} + A_x\hat{j}$. Este cambio conduce que el vector unitario que es perpendicular a $\hat{r}$ es:

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{\theta}}{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \tag{2.76}$$

Con esto, la derivada temporal de la posición en coordenadas polares (ecuación 2.73) es:

$$\vec{v}_{pol} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \tag{2.77}$$

La derivada temporal de la posición unitaria (usando la ecuación 2.75) es $\dot{\hat{r}} = -\sin(\theta)\dot{\theta}\hat{i} + \cos(\theta)\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}\hat{\theta}$. Por lo tanto, la velocidad en coordenadas polares es:

$$\vec{v}_{pol} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{2.78}$$

Para el caso de la aceleración, se repite el procedimiento:

$$\vec{a}_{pol} = \frac{d\vec{v}_{pol}}{dr} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \tag{2.79}$$

Como sabemos que $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$, podemos reescribir la ecuación 2.79 como:

$$\vec{a}_{pol} = \ddot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} = \ddot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{2.80}$$

De forma análoga, la derivada temporal de $\hat{\theta}$ es $-\dot{\theta}\hat{r}$. En la ecuación 2.80:

$$\vec{a}_{pol} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{2.81}$$

Para coordenadas cilíndricas, se le agrega la posición vertical, lo que nos deja el siguiente set de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{cil} &= r\hat{r} + z\hat{z} \\ \vec{v}_{cil} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \\ \vec{a}_{cil} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z} \end{aligned}} \tag{2.82}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se tiene el set de ecuaciones para el sistema de coordenadas esféricas:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{esf} &= r\,\hat{r} \\ \vec{v}_{esf} &= \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \\ \vec{a}_{esf} &= \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right)\hat{\theta} \\ &\quad + \left(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\hat{\phi} \end{aligned}} \tag{2.83}$$

Aquí, el cambio de variable es:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi), \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi), \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.84}$$

donde el vector posición se puede escribir como:

$$\vec{r} = r\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + r\sin(\theta)\sin(\phi)\hat{j} + r\cos(\theta)\hat{k} \tag{2.85}$$

De aquí podemos ver que el vector radial unitario para la componente radial es:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k} \tag{2.86}$$

Por otro lado, el cambio de vectores se relaciona de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\hat{\theta}} = \hat{\theta}, \qquad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin(\theta)\hat{\phi} \tag{2.87}$$

Esto porque los cambios en los vectores unitarios son perpendiculares a los vectores unitarios mismos. Por lo tanto, tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{r} &= \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}\\ \hat{\theta} &= \cos(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{j} - \sin(\theta)\hat{k}\\ \hat{\phi} &= -\sin(\phi)\hat{i} + \cos(\phi)\hat{j}\end{aligned}} \tag{2.88}$$

Esto permite escribir las coordenadas de manera matricial:

$$\mathbf{E} = \mathbf{M}\mathbf{C} \tag{2.89}$$

donde:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\\ \hat{\phi}\end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix}\hat{i}\\ \hat{j}\\ \hat{k}\end{pmatrix} \tag{2.90}$$

Lo cual representa las matrices de coordenadas cartesianas $\mathbf{C}$, coordenadas esféricas $\mathbf{E}$ y la matriz de rotación ortogonal que las relaciona $\mathbf{M}$. Para encontrar las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas esféricas, hay que tomar la inversa de la matríz $\mathbf{M}$, es decir, su matriz transpuesta $\mathbf{M}^T$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^T\mathbf{E} \tag{2.91}$$

con:

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\end{pmatrix} \tag{2.92}$$

Lo que es equivalente:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{i} &= \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{r} + \cos(\theta)\cos(\phi)\hat{\theta} - \sin(\phi)\hat{\phi}\\ \hat{j} &= \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{r} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{\theta} + \cos(\phi)\hat{\phi}\\ \hat{k} &= \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}\end{aligned}} \tag{2.93}$$

Ejercicio resuelto
Una partícula de masa m=1.50 kg se mueve en coordenadas cilíndricas según

$$r(t) = 2 + 0.5t \quad m, \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{6}t^2 \quad rad, \qquad z(t) = 0.2t \quad m, \tag{2.94}$$

donde t está en segundos.
1. Calcular en t=2.0 s el vector velocidad $\vec{v}$ en la base $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$ y su magnitud.

R: Derivamos cada función de acuerdo al set de ecuaciones 2.82:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= 0.5 \;\; m/s, & \ddot{r}(t) &= 0 \;\; m/s^2\\ \dot{\theta}(t) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\pi}{6}t^2\Big) = \frac{\pi}{3}t \;\; rad/s, & \ddot{\theta}(t) &= \frac{\pi}{3} \;\; m/s^2\\ \dot{z}(t) &= 0.2 \text{ m/s}, & \ddot{z}(t) &= 0 \;\; m/s^2\end{aligned} \tag{2.95}$$

Evaluamos todos los términos para t=2.0 s:

$$\begin{aligned}r(2) &= 2 + 0.5 \cdot 2 = 3.0 \;\; m,\\ \dot{r}(2) &= 0.5 \;\; m/s\\ \ddot{r}(2) &= 0 \;\; m/s^2,\\ \dot{\theta}(2) &= \frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \approx 2.094 \text{ rad/s}\\ \ddot{\theta}(2) &= \frac{\pi}{3} \approx 1.047 \text{ rad/s}^2\\ \dot{z}(2) &= 0.2 \text{ m/s}\\ \ddot{z}(2) &= 0 \;\; m/s^2.\end{aligned} \tag{2.96}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.82 para la velocidad:

$$\vec{v}(2) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} = 0.5\,\hat{r} + 3.0 \cdot \frac{2\pi}{3}\,\hat{\theta} + 0.2\,\hat{k} = 0.5\,\hat{r} + 2\pi\,\hat{\theta} + 0.2\,\hat{k} \tag{2.97}$$

Considerando los valores numéricos: $2\pi \approx 6.283$,tenemos que la velocidad es:

$$\vec{v}(2) \approx 0.50\,\hat{r} + 6.283\,\hat{\theta} + 0.20\,\hat{k} \quad m/s \tag{2.98}$$

A su vez, la magnitud:

$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{0.5^2 + (2\pi)^2 + 0.2^2} = \sqrt{0.25 + 39.47 + 0.04} = \sqrt{39.768} \approx 6.305 \quad m/s. \tag{2.99}$$

2. Calcular el vector aceleración $\vec{a}$ en la base $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$ y su magnitud.

R: Calculemos cada término numérico: Primero $r\dot{\theta}^2$:

$$r(2)\,\dot{\theta}(2)^2 = 3.0 \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 3.0 \cdot \frac{4\pi^2}{9} = \frac{12\pi^2}{9} = \frac{4\pi^2}{3} \quad m/s^2. \tag{2.100}$$

En forma numérica es:

$$\frac{4\pi^2}{3} \approx \frac{4 \cdot 9.869}{3} \approx \frac{39.478}{3} \approx 13.159. \tag{2.101}$$

Luego el componente radial es $\hat{r}$:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 13.159 \approx -13.159 \quad m/s^2. \tag{2.102}$$

La componente tangencial es $\hat{\theta}$:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 3.0 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{2\pi}{3} \quad rad/s^2. \tag{2.103}$$

Calculemos cada parte de esta ecuación:

$$3.0 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \approx 3.141...,$$

$$2 \cdot 0.5 \cdot \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2.094,$$

Sumando los términos:

$$a_\theta \approx \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \approx 5.235 \quad m/s^2. \tag{2.104}$$

Por último, en la componente vertical z tenemos que:

$$a_z = \ddot{z} = 0 \quad m/s^2. \tag{2.105}$$

Por tanto

$$\vec{a}(2) \approx -13.159\,\hat{r} + 5.236\,\hat{\theta} + 0\,\hat{k} \quad m/s^2 \tag{2.106}$$

Por último, la magnitud de esta aceleración es:

$$|\vec{a}(2)| = \sqrt{(-13.159)^2 + (5.235)^2} \approx \sqrt{173.182 + 27.419} \approx \sqrt{200.601} \approx 14.16 \quad m/s^2. \tag{2.107}$$

2.8. Aceleración centrípeta y tangencial

La aceleración es el cambio de la velocidad de un objeto con respecto al tiempo. A diferencia del movimiento rectilíneo, en el movimiento curvilíneo la aceleración tiene dos componentes: la aceleración centrípeta y la aceleración tangencial.
Para cada trayectoria que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$, tenemos que la aceleración se puede descomponer, como muestra la Figura 2.6. Es decir, que existe una aceleración a lo largo del movimiento (aceleración tangencial $\vec{a}_t$) como también una aceleración normal $\vec{a}_n$. Es esta aceleración la que desvía la trayectoria, curvándola. En el caso en que esto ocurra siempre, se forma el circulo de la Figura 2.6

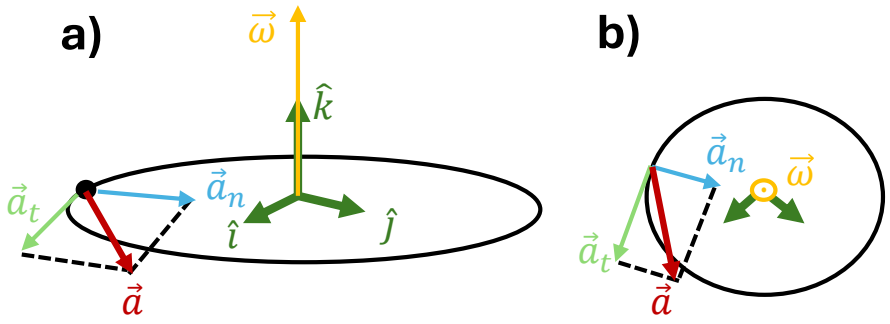


Figura 2.6: Aceleración tangencial y normal para el caso de una trayectoria circular.

La **aceleración centrípeta**, también conocida como aceleración normal, es la componente de la aceleración que apunta siempre hacia el centro de la trayectoria circular. Esta aceleración es responsable del cambio en la dirección del vector de velocidad. Un objeto en movimiento circular uniforme tiene una velocidad de magnitud constante, pero su dirección cambia continuamente, lo que requiere una aceleración centrípeta. Sin esta componente, el objeto se movería en línea recta debido a la inercia.
Para una trayectoria circular de radio R y rapidez v, tenemos que la aceleración centrípeta a_c es:

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R}} \tag{2.108}$$

Si se usa la velocidad angular ω (con $v = R\omega$ en una circunferencia de radio R), entonces

$$a_c = R\omega^2 \tag{2.109}$$

De forma análoga a las ecuaciones 2.69 y 2.70, tenemos que $|\vec{v} \times \vec{a}| = va\sin(\theta)$. En el caso en que θ sea noventa grados, significa que sin es igual a 1, lo que define a una aceleración perpendicular a la trayectoria, por lo que se puede definir la aceleración centrípeta como:

$$\boxed{a_c = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}} \tag{2.110}$$

La **aceleración tangencial** es la componente de la aceleración que es tangente a la trayectoria circular. Esta componente es responsable del cambio en la magnitud de la velocidad del objeto (su rapidez). Un objeto en movimiento circular con velocidad constante no tiene aceleración tangencial. Si su velocidad aumenta o disminuye, existe una aceleración tangencial. Considerando que el valor absoluta del producto punto entre dos vectores es $|\vec{v}\cdot\vec{a}| = va\cos(\theta)$, tenemos que el caso en que la aceleración sea paralelo (tangente) a la trayectoria, el ángulo será cero y por tanto, el cos será igual a uno. Esto nos permite definir la aceleración tangencial como:

$$\boxed{a_t = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{a}|}{v}} \tag{2.111}$$

Luego, se puede definir la aceleración en función de sus coordenadas tangenciales y centrípetas como:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_c\hat{n} \tag{2.112}$$

donde $\hat{n}$ hace referencia a la componente 'normal' o centrípeta de la aceleración. Este es el conocido 'Marco de Frenet' y es válido para cualquier trayectoria. De esta forma, el radio en coordenadas polares pasa a llamarse radio de curvatura.
En caso de que la trayectoria sea polar con radio constante, la aceleración en un plano para el movimiento circular es:

$$\vec{a}_{cil} = -(r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta})\hat{\theta} = a_c\hat{n} + a_t\hat{t} \Longrightarrow a_c = -r\dot{\theta}^2, \quad a_t = r\ddot{\theta}. \tag{2.113}$$

Ejercicio resuelto
Una partícula se mueve en el plano cuyo movimiento viene dado en coordenadas polares por:

$$r(t) = 2 + 0.5\,t \quad (\text{m}), \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{6}\,t^2 \quad (\text{rad}), \tag{2.114}$$

con t en segundos. Calcular en t=2.0 s.
1. Calcular el vector velocidad $\vec{v}$ (en la base $\{\hat{r}, \hat{\theta}\}$) y su magnitud v.

R: Las fórmulas en coordenadas polares (planar) son las mostradas por la ecuación 2.82 (con la componente vertical y sus variaciones igual a cero). Las derivadas y valores en t=2.0 s son:

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= 0.5, & \ddot{r}(t) &= 0 \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = \frac{\pi}{3}\,t, & \ddot{\theta}(t) &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \tag{2.115}$$

Ahora, evaluando en $t = 2\ s$:

$$\begin{aligned} r(2) &= 3\ \ m, & \dot{r}(2) &= 0.5,\ \ m/s & \ddot{r}(2) &= 0\ \ m/s^2 \\ \theta(2) &= \frac{2}{3}\pi\ \ rad, & \dot{\theta}(2) &= \frac{2\pi}{3}\ \ rad/s, & \ddot{\theta}(2) &= \frac{\pi}{3}\ \ rad/s^2 \end{aligned} \tag{2.116}$$

Calculando la velocidad, tenemos:

$$\vec{v}(2) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 0.5\,\hat{r} + 2\pi\,\hat{\theta} \quad m/s. \tag{2.117}$$

Su magnitud es:

$$v = \sqrt{0.5^2 + 4\pi^2} \approx 6.3\ m/s \tag{2.118}$$

2. Calcular el vector velocidad $\vec{a}$ y su magnitud a.

R: Para esto, basta con recordar la expresión para la aceleración en coordenadas polares de la ecuación 2.82 junto a los valores en ecuaciones 2.116:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = \left(0 - 3\frac{4\pi^2}{9}\right)\hat{r} + \left((3)\frac{\pi}{3} + 2(0.5)\frac{2\pi}{3}\right)\hat{\theta} \approx -13.12\ \hat{r} + 5.24\ \hat{\theta}\ \ m/s^2 \tag{2.119}$$

La magnitud es:

$$|\vec{a}| \approx 14.13\ m/s \tag{2.120}$$

3. Obtener la aceleración tangencial a_y y la aceleración centrípeta (normal) a_n usando tanto la descomposición de Frenet como la expresión vectorial.

R: La componente tangencial se obtiene por proyección, como muestra la ecuación 2.111:

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{a}|}{v} = \frac{|v_r a_r + v_\theta a_\theta|}{v} = \frac{|-0.5{*}13.12 + 2\pi{*}5.24|}{6.3}\ \ m/s^2 \approx 4.2\ m/s^2 \tag{2.121}$$

La aceleración normal (centrípeta) puede obtenerse por la ecuación 2.110

$$a_c = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v} = \frac{|v_r a_\theta - v_\theta a_r|}{v} = \frac{|0.5{*}5.24 - 2\pi(-13.12)|}{6.3}\ \ m/s^2 \approx 13.5\ m/s^2 \tag{2.122}$$

4. El radio de curvatura R en ese instante.

R: Este se puede obtener usando la ecuación 2.108 para la aceleración centrípeta o normal:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{a_c} \approx \frac{6.3^2}{13.5} \approx 2.9\ \ m \tag{2.123}$$

En $t = 2$ la partícula posee una rapidez relativamente alta (≈6.3 m/s) y su aceleración está dominada por la componente normal (centrípeta) hacia el centro de curvatura: $a_{\rm n}$ es mucho mayor que $a_{\rm t}$. Es decir, en ese instante el cambio de dirección de la velocidad es más importante que el cambio de su módulo. El radio de curvatura de la trayectoria en ese punto es $\rho \approx 2.94\ m$.

Ejercicio resuelto
Demuestre que el radio de curvatura es:

$$R = \frac{v^2}{|\hat{t} \times \vec{a}|} = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$

R: De las ecuaciones 2.108 y 2.110, tenemos que $R = \frac{v^2}{a_c}$ y $a_c = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v}$. El lado derecho, después de reemplazar a_c, queda:

$$R = \frac{v^2}{a_c} = \frac{v^2}{|\vec{v} \times \vec{a}|/v} = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \tag{2.124}$$

Usando el producto cruz sobre la ecuación 2.112, tenemos:

$$\hat{t} \times \vec{a} = a_t \hat{t} \times \hat{t} + a_c \hat{t} \times \hat{n} = a_c \hat{t} \times \hat{n} \Longrightarrow |\hat{t} \times \vec{a}| = a_c \tag{2.125}$$

donde se ha usado que el producto cruz de entre dos vectores paralelos es cero. Reemplazando en la ecuación 2.108, tenemos:

$$a_c = |\hat{t} \times \vec{a}| = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{|\hat{t} \times \vec{a}|} \tag{2.126}$$

Lo que demuestra la igualdad de este ejercicio.

2.9. Teorema Fundamental de la Cinemática

La Escuela de Oxford, y en particular los *Calculadores* del Merton College en el siglo XIV, se interesaron en describir el movimiento de los objetos de una manera cuantitativa. Para ello, crearon un lenguaje y una clasificación de movimientos que sentaron las bases de la cinemática moderna. Principalmente, distinguieron dos tipos de movimientos importantes. El primero fue el **uniformiter** (o movimiento uniforme). Este término se refiere a un movimiento con velocidad constante. En este caso, la velocidad no cambia en el tiempo. Un ejemplo de la vida diaria sería un vehículo que viaja a 80 km/h en una autopista recta con el control de crucero activado. El segundo es el **uniformiter disforis** (o movimiento uniformemente acelerado). Este concepto describe un movimiento en el que la velocidad cambia de manera constante. Un ejemplo de esto es la caída libre de un objeto bajo la influencia de la gravedad, donde su velocidad aumenta de forma lineal con el tiempo.
Usando el concepto de uniformiter disformis, los calculadores de Oxford establecieron el **Teorema Fundamental de la Cinemática**, también conocido como la ley de la velocidad

media. Este teorema establece que la distancia recorrida por un objeto con aceleración constante es igual a la que recorrería un objeto con una velocidad constante igual al promedio de su velocidad inicial y final. Es decir:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{Velocidad inicial} + \text{Velocidad final}}{2} \tag{2.127}$$

Aquí es importante destacar que los calculadores no tenían las herramientas del cálculo moderno para describir el teorema. En las siguientes líneas realizaremos la demostración de este teorema por medio de esas herramientas para ver lo avanzado que estaban en los años 1300 (plena Edad Media). Para esto, consideremos la velocidad para un movimiento uniformemente acelerado (uniformiter disformis) que está dado por la ecuación 2.16: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}_0\Delta t$, donde el subíndice i y f indican velocidad inicial y final, respectivamente. Esto permite escribir la aceleración multiplicada por la aceleración como:

$$\vec{a}_0\Delta t = \vec{v}_f - \vec{v}_i \tag{2.128}$$

La ecuación 2.17 nos muestra que la posición de una masa acelerada uniformemente es $\vec{x}_f = \vec{x}_i + \vec{v}_i\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2$. Usando el concepto de velocidad media, tenemos:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_i + \vec{v}_i\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 - \vec{x}_i}{\Delta t} = \vec{v}_i + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t \tag{2.129}$$

Reemplazando la ecuación 2.128 en 2.129, nos queda:

$$\boxed{\vec{v}_{med} = \vec{v}_i + \frac{1}{2}(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_f}{2}} \tag{2.130}$$

Por lo que se cumple el teorema de hace 700 años, aproximadamente.
Luego, la distancia recorrida (usando la ecuación 2.8) es:

$$\boxed{d = v_{med} \cdot t = \left(\frac{\vec{v}_i + \vec{v}_f}{2}\right) \cdot t} \tag{2.131}$$

2.10. Domingo de Soto y la aceleración de gravedad constante

En el siglo XVI, la comprensión del movimiento de los cuerpos en caída libre estaba limitada por las ideas aristotélicas, que sostenían que los objetos caían a velocidades proporcionales a su peso. Sin embargo, Domingo de Soto (1494-1560), influenciado por las ideas de la Escuela de Oxford, propuso una visión diferente en su libro *Quaestiones*. De hecho, Soto fue la primera persona en aplicar de forma rigurosa el concepto del uniformiter disformis (movimiento uniformemente acelerado) para demostrar que la aceleración de la gravedad es constante. Su razonamiento se basó en la observación de la simetría del movimiento de un proyectil lanzado verticalmente, como una bala de cañón.

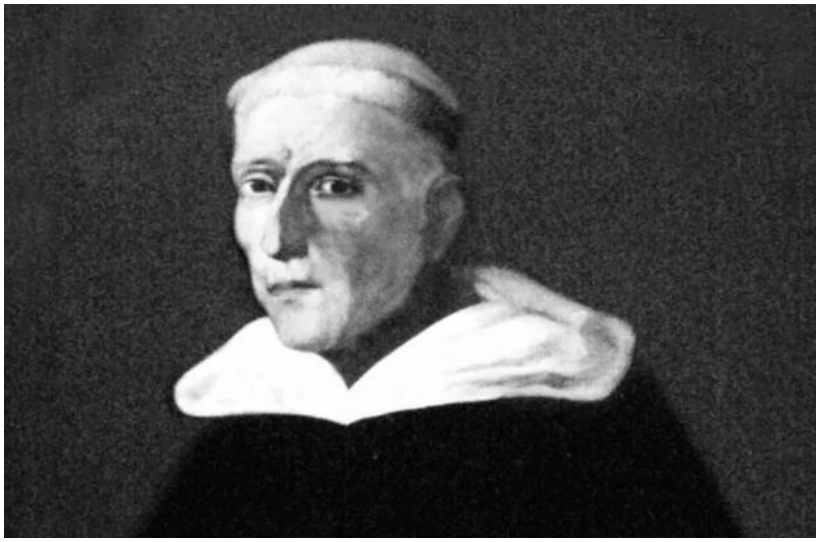


Figura 2.7: Domingo de Soto (1494-1560). Formado en la Universidad de Alcalá de Henares y en la Universidad de París, fue un destacado catedrático de la Universidad de Salamanca durante el siglo de oro español.

Soto observó que el tiempo que un proyectil tarda en subir a su punto más alto es exactamente el mismo que tarda en caer de vuelta al suelo. Además, la distancia recorrida en la subida es la misma que la distancia de la bajada. Esto significaba que $d_{subida} = d_{bajada}$, mientras que $t_{subida} = t_{bajada}$. En términos del teorema fundamental de la cinemática (ecuación 2.131), debía existir una velocidad media y que la velocidad media de subida y bajada debería ser igual. Esto es $v_{med-subida} = v_{media-bajada}$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Subida:} \quad & \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{v_i}{2} \\ \text{Bajada:} \quad & \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{v_f}{2} \\ & \Longrightarrow v_i = v_f \end{aligned} \tag{2.132}$$

Es decir, que en subida, la velocidad inicial es alta pero se hace cero a medida que el proyectil alcanza el punto máximo (o ha recorrido la distancia d). En cambio, las velocidades se invierten en el caso de la caída, pues ahora la velocidad inicial es cero y la final es diferente de cero. Con esto, queda claro que las velocidades con las que parte el proyectil como la velocidad con la que impacta el suelo son las mismas. Luego, la velocidad media se puede escribir como: $v_{media} = \frac{v_0}{2}$, con v_0 una constante (que es igual a la velocidad inicial y final). Reemplazando esto en la ecuación 2.129, nos queda:

$$v_{med} = \frac{v_0}{2} = v_0 + \frac{1}{2}a_0\Delta t \Longrightarrow \boxed{a_0 = -\frac{v_0}{\Delta t} = \text{constante} = g} \tag{2.133}$$

Como v_0 es un valor fijo inicial y Δt es el tiempo medido que demora en subir (o bajar), el lado derecho de la ecuación es constante. Con esta lógica, Domingo de Soto concluyó que

esto solo podía ser posible si la aceleración que actuaba sobre el proyectil (la gravedad) era constante en magnitud.
Hay otras conclusiones sobre el trabajo de Domingo de Soto. Por ejemplo, su trabajo revela que la ciencia moderna no nació de cero en el Renacimiento, sino que es resultado de siglos de trabajo teórico y filosófico. Adicionalmente, la *Escuela de Salamanca*, a la que pertenecía, fue pionera en combinar matemáticas, filosofía y observación natural. Con esto, su tratado se transformó en una referencia pedagógica ya que fue utilizado durante décadas como texto académico, difundiendo la idea de que el movimiento podía estudiarse matemáticamente. En particular, su trabajo llegó a Italia a través de cartas y libros, y se considera que sirvió de inspiración para Galileo Galilei en sus famosos experimentos con planos inclinados, pues citó a Soto en sus escritos.

Capítulo 3

Dinámica

En el capítulo anterior aprendimos el lenguaje fundamental de la Cinemática: cómo describir el movimiento de un objeto en términos de su posición, velocidad y aceleración, independientemente de lo que lo causó. Dominamos las herramientas para responder a la pregunta: ¿Cómo se mueve?

Ahora pasamos a la dinámica, la cual es la rama de la física que estudia las causas del movimiento de los objetos. Es decir, que responde a una pregunta más profunda: ¿Por qué se mueve (o se detiene, o cambia de dirección)? A diferencia de la cinemática, que solo describe el movimiento, la dinámica se enfoca en las fuerzas y las propiedades de los objetos (como la masa) que influyen en su estado de movimiento.

3.1. Momentum lineal, fuerza y leyes de Newton

3.1.1. Momentum lineal

El momentum lineal o cantidad de movimiento se define como el producto de la masa de una partícula por su velocidad:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}} \tag{3.1}$$

Esta ecuación es de las más importantes para entender las colisiones y las interacciones entre objetos. Básicamente, existe el **principio de conservación del momentum lineal** que establece que si la fuerza neta sobre un sistema de objetos es cero, el momentum lineal total del sistema permanece constante. Esto significa que el momento lineal entre dos instantes de tiempo, permanece constante. Matemáticamente esto es:

$$\boxed{\sum \vec{P}_{inicial} = \sum \vec{P}_{final}} \tag{3.2}$$

Ejercicio resuelto
Un patinador de masa m_1=70 kg se mueve a una velocidad de v_1=5 m/s hacia el este. Choca con otro patinador de masa m_2=50 kg que se mueve a v_2=3 m/s hacia el norte. Después de la colisión, los dos patinadores se mueven juntos como un solo objeto.
1. Calcule el momentum lineal total del sistema antes de la colisión.

R: Primero, usamos un sistema cartesiano donde el eje x es el este y el eje y es el norte. Esto significa que la velocidad del primer patinador queda expresada como $\vec{v}_1$= 5 m/s $\hat{i}$, mientras que la del segundo patinador es $\vec{v}_2$= 3 m/s $\hat{j}$. Ahora tenemos que usar la definición de momento lineal:

$$\sum \vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{inicial-1} + \vec{P}_{inicial-2} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (70\ \ kg)(5\ \ m/s\ \ \hat{i}) + (50\ \ kg)(3\ \ m/s\ \ \hat{j}) = \\ \Longrightarrow \sum \vec{P}_{inicial} = (350\hat{i} + 150\hat{j})\ \ kg\frac{m}{s} \tag{3.3}$$

2. Calcule la velocidad final de los dos patinadores después de la colisión.

R: Si los patinadores se mueven como un único objeto, se tiene que sus velocidades son iguales. Esto significa que, usando la ecuación 3.2:

$$m_1\vec{v}_{inicial-1} + m_2\vec{v}_{inicial-2} = m_1\vec{v}_{final-1} + m_2\vec{v}_{final-2} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{final} \tag{3.4}$$

Despejando $\vec{v}_{final}$ y agregando los valores, tenemos que la velocidad final es:

$$\vec{v}_{final} = \frac{m_1\vec{v}_{inicial-1} + m_2\vec{v}_{inicial-2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{\sum \vec{p}_{inicial}}{(m_1 + m_2)} = \frac{(350\hat{i} + 150\hat{j})\ \ kg\frac{m}{s}}{(70 + 50)\ \ kg} \approx \left(3\hat{i} + \frac{5}{4}\hat{j}\right)\ \ \frac{m}{s} \tag{3.5}$$

La magnitud final de esta velocidad es:

$$v_{final} \approx 3.2\ \frac{m}{s} \tag{3.6}$$

3.1.2. Fuerza

La fuerza es un concepto fundamental en física, que se define como cualquier influencia que, cuando se aplica a un objeto, causa un cambio en su estado de movimiento o de reposo. En otras palabras, una fuerza es un empuje o un tirón. La fuerza es una cantidad vectorial, lo que significa que tiene tanto magnitud (cuánto empuja o tira), dirección (eje a lo largo del cual actúa), sentido (hacia dónde apunta) y punto de aplicación (dónde se ejerce). Su unidad en el Sistema Internacional (SI) es el newton (N) que equivale a $kg \cdot m/s^2$.
Existen dos tipos de fuerza en mecánica y que refieren a las **fuerzas de contacto**, que son aquellas que resultan del contacto físico entre dos objetos. Ejemplos incluyen el empuje de una mano sobre una pared o la fricción entre el suelo y una caja que se desliza, y las **fuerzas de campo**, que actúan a distancia sin contacto físico. Ejemplos comunes son la fuerza de gravedad y las fuerzas electromagnéticas.

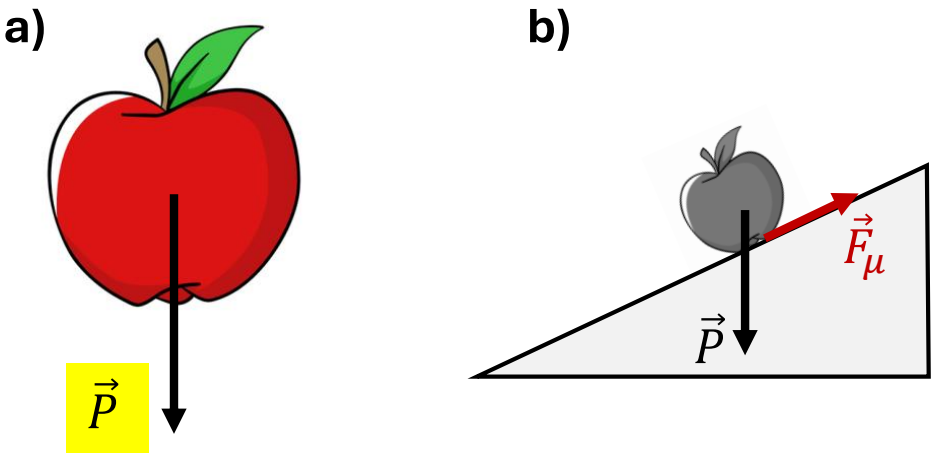


Figura 3.1: Una manzana cayendo es un ejemplo de un objeto que está siendo afectado por una fuerza de campo (gravedad). En cambio, un objeto cayendo por un plano inclinado es un ejemplo de una fuerza de contacto (fricción dinámica)

3.1.3. Leyes de Newton

Las Leyes de Newton, formuladas por Sir Isaac Newton en 1687, son los cimientos de la mecánica clásica. Describen la relación entre la fuerza, el movimiento y la inercia de los objetos, explicando por qué los objetos se mueven de la manera en que lo hacen. Es esencial para describir el universo y tiene extrapolaciones que van más allá de la mecánica, llegando a describir una serie de otros procesos como los fluidos y la elastodinámica. Estas se dividen en tres leyes:

Primera ley de Newton (ley de la Inercia)

Definición:

Un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento permanece en movimiento con una velocidad constante, a menos que sobre él actúe una fuerza neta externa.

Aquí es importante destacar que la *inercia* es la tendencia de un objeto a resistir cambios en su estado de movimiento, mientras que la masa de un objeto es vista como una medida de su inercia. Es decir, que mientras más masa tenga un objeto, más difícil es cambiar su estado de movimiento. Un ejemplo clásico de la inercia es el de un auto que frena bruscamente. El pasajero se desplaza hacia adelante debido a la inercia de su cuerpo, pues el freno es del auto, no del pasajero. Es el cinturón de seguridad el que evita que el pasajero salga eyectado del vehículo.
La formulación matemática es, si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero.

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}} \tag{3.7}$$

Ejercicio resuelto
Un bloque está sobre una mesa sin rozamiento y dos estudiantes empujan horizontalmente el bloque con fuerzas iguales y opuestas de módulo F =12 N.
1. Mostrar que la aceleración es cero.

R: Las fuerzas horizontales aplicadas son opuestas, lo que significa que $\vec{F}_1$= 12 $\hat{i}$ y $\vec{F}_2$= -12 $\hat{i}$. Adicionalmente, el bloque al estar sobre una mesa aparecen otras fuerzas que son el peso y la normal, que se compensan verticalmente por lo que no hay movimiento vertical. La forma de aplicar esta Leyes la siguiente:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{N} = \vec{0} \;\; N \tag{3.8}$$

La fuerza normal, para que el objeto no se despegue de la mesa, debe ser igual al peso (que actúa por la presencia de la gravedad), lo que se calcula como $N = mg$, por lo tanto, la suma de fuerzas queda:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{W} + \vec{N} = (12 - 12)\hat{i} + (-mg + N)\hat{j} \;\; N = 0\hat{i} + 0\hat{j} \;\; N \tag{3.9}$$

lo que cumple con la primera Leyde Newton.

Ejercicio resuelto
Un anillo en el plano horizontal está sujeto por tres cuerdas que se tensan con fuerzas $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_3$. Las direcciones son: $\vec{T}_1$ a lo largo de 0°, $\vec{T}_2$ a 120° y $\vec{T}_3$ a 240° (todas en el plano xy).
1. Si $|\vec{T}_1|$= 30 N y el anillo está en equilibrio, encuentre $|\vec{T}_2|$ y $|\vec{T}_3|$.

R: Para este ejercicio tenemos que representar las fuerzas por componentes. Con esto, tenemos que 0° sea igual a $\hat{i}$ y 90° a $\hat{j}$. Luego, las fuerzas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
&\vec{T}_1 = 30\hat{i} \;\; N \\
&\vec{T}_2 = T_2(\cos(120°)\hat{i} + \sin(120°)\hat{j}) \;\; N = T_2\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;\; N \\
&\vec{T}_3 = T_3(\cos(240°)\hat{i} + \sin(240°)\hat{j}) \;\; N = T_3\left(-\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;\; N
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La aplicación de la Primera Leyde Newton establece que la suma de fuerzas debe ser igual a cero, y esto también es válido para cada componente. Es decir, todas las fuerzas en el eje $\hat{i}$ deben ser cero, así como todas las fuerzas en el eje $\hat{j}$. Luego, en $\hat{i}$:

$$T_{1i} + T_{2i} + T_{3i} = 30 + \left(-\frac{T_2}{2}\right) + \left(-\frac{T_3}{2}\right) \;\; N = 0 \;\; N \rightarrow T_2 + T_3 = 60 \;\; N \tag{3.11}$$

Para el caso en la componente $\hat{j}$:

$$T_{1j} + T_{2j} + T_{3j} = 0 + \left(\frac{T_2\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{T_3\sqrt{3}}{2}\right) \quad N = 0 \quad N \rightarrow T_2 = T_3 \tag{3.12}$$

Reemplazando en la ecuación 3.11 tenemos que $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|$=30 N.

Segunda ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica)

Definición:

La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa. La aceleración tiene la misma dirección que la fuerza neta.

Esta ley cuantifica la relación entre causa (fuerza) y efecto (aceleración). Por ejemplo, empujar un carrito de supermercado vacío requiere menos esfuerzo que empujarlo lleno, haciendo que la fuerza neta necesaria para moverlo sea proporcional a la masa del carrito + compras. Otro ejemplo clásico es el de un balón de fútbol que se acelera mucho más cuando se le ejerce una fuerza mayor (patada), por lo que sale con una velocidad mayor.
Su formulación matemática es:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \tag{3.13}$$

Esto quiere decir que la fuerza neta es igual al cambio de estado de movimiento. El cambio de momento se expresa como $d\vec{P}/dt = (dm/dt)\vec{v} + m\vec{a}$. En caso de que la masa sea constante, la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.14}$$

Ejercicio resuelto
Un bloque de masa m está sobre un plano inclinado de ángulo θ con coeficiente de fricción cinética μ_k. Se aplica una fuerza $\vec{F}_{ex}$ (de módulo F_{ex}) formando un ángulo α por encima de la horizontal.
1. Hallar la aceleración del bloque a lo largo del plano.

R: Para este caso, la masa está sujeta a cuatro fuerzas diferentes: fuerza de fricción $\vec{f}_k$ (opuesta al movimiento), normal $\vec{N}$, peso $\vec{W}$ y la fuerza externa $\vec{F}_{ex}$. Esto es:

$$\sum \vec{F} = \vec{f}_k + \vec{N} + \vec{W} + \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \tag{3.15}$$

La fuerza de fricción es proporcional a la normal ($|\vec{f_k}| = |\mu_k \vec{N}|$), mientras que el peso es $m\vec{g}$. Con esto, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{N} + \vec{f_k} + m\vec{g} + \vec{F}_{ex}) = a\hat{i}' \tag{3.16}$$

donde $\hat{i}'$ es la dirección del plano inclinado. Aquí hay que tener en cuenta que no todas las fuerzas son perfectamente paralelas u horizontales al plano inclinado. Por lo tanto, hay que realizar la descomposición. Por ejemplo, para el caso de la componente perpendicular al plano inclinado no hay aceleración. Además, el peso, de magnitud mg, tiene una componente contraria al movimiento del bloque, formando un ángulo $\beta = \pi/2 - \theta$. La componente perpendicular a ese plano, por tanto, es: $W_{perp} = -mg\sin(\beta) = -mg\sin(\pi/2-\theta) = -mg\cos(\theta)$. La componente paralela al plano es $W_{par} = -mg\cos(\beta) = -mg\sin(\theta)$. Como la fuerza externa tiene un ángulo α sobre el plano inclinado, las componentes son $F_{perp} = F_{ex}\sin(\alpha)$ y $F_{par} = F_{ex}\cos(\alpha)$ respectivamente. Finalmente, la fricción actúa únicamente paralela al plano de movimiento, por lo que no tiene componente perpendicular al plano. Con esto, las ecuaciones por componente son:

$$\begin{aligned} N + (-mg\cos(\theta)) + (F_{ex}\sin(\alpha)) = 0, &\quad \text{Perpendicular al plano inclinado} \\ f_k + (-mg\sin(\theta)) + (F_{ex}\cos(\alpha)) = ma, &\quad \text{Paralelo al plano inclinado} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sabiendo que $f_k = \mu_k N$, reemplazamos:

$$\begin{aligned} N = mg\cos(\theta) - F_{ex}\sin(\alpha), &\quad \text{Perpendicular al plano inclinado} \\ -\mu_k N - mg\sin(\theta) + F_{ex}\cos(\alpha) = ma, &\quad \text{Paralelo al plano inclinado} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Reemplazando, la primera en la segunda ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m}\left[-\mu_k(mg\cos(\theta) - F_{ex}\sin(\alpha)) - mg\sin(\theta) + F_{ex}\cos(\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[F_{ex}(\mu_k\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) - mg(\mu_k\cos(\theta) + \sin(\theta))\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para el caso en el que la fuerza externa sea paralela al plano inclinado, tenemos que α es cero y por tanto la aceleración es:

$$a = \frac{F_{ex}}{m} - g(\mu_k\cos(\theta) + \sin(\theta)) \tag{3.20}$$

1. ¿Cuál es la condición para el inicio del movimiento?

R: Para que esto sea de esta manera, hay que exigir que $a \geq 0$, lo que significa que:

$$F_{ex} \geq mg(\mu_s\cos(\theta) + \sin(\theta)) \tag{3.21}$$

Note que aquí se cambió el coeficiente de fricción cinemático μ_k por μ_s, que es el coeficiente de fricción estático y válido para partículas que no están en movimiento aún.

Tercera ley de Newton (ley de Acción y Reacción)

Definición:

Si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, el objeto B ejerce simultáneamente una fuerza de igual magnitud y en dirección opuesta sobre el objeto A.

Es importante notar que las dos fuerzas actúan sobre objetos diferentes y no se anulan entre sí. El ejemplo más clásico es el de cuando caminas. Con esto empujas el suelo hacia atrás con tu pie (acción). El suelo, a su vez, te empuja hacia adelante con la misma fuerza (reacción), permitiéndote avanzar.
Su formulación matemática es:

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}} \tag{3.22}$$

Donde $\vec{F}_{AB}$ es la fuerza que el objeto A ejerce sobre B y $\vec{F}_{BA}$ es la fuerza que B ejerce sobre A.

Ejercicio resuelto
Dos patinadores inicialmente en reposo sobre hielo prácticamente sin rozamiento se colocan uno frente al otro. El patinador A tiene masa m_A= 60 kg y el patinador B tiene masa m_B=80 kg. Se empujan mutuamente y durante el contacto el patinador A siente una fuerza horizontal aproximadamente constante de magnitud F=200 N dirigida hacia la derecha durante un intervalo de tiempo Δt=0.50 s.
1. Calcule las velocidades finales v_A y v_B inmediatamente después del empuje.

R: Por la tercera ley de Newton, las fuerzas entre A y B son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si la fuerza que B ejerce sobre A es $F_{BA} = F\ \hat{i}\ N$, entonces la fuerza de A sobre B es $F_{BA} = -F\ \hat{i}\ N$.
Para encontrar las velocidades finales, aplicamos el **teorema impulso-cantidad de movimiento** a cada patinador por separado. El impulso sobre A es:

$$\boxed{\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt} \rightarrow \vec{J}_A = \vec{F}\Delta t = F\Delta t\ \ \hat{i} \tag{3.23}$$

donde se ha considerado que la fuerza es constante. Este teorema indica que la variación de momento es igual al impulso. Esto es $\Delta\vec{P} = \vec{J}$. Como ambos patinadores parten del reposo, se tiene que sus velocidades iniciales son cero ($\Delta\vec{P} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\vec{v}$). Por lo tanto, usando el momento, tenemos que la velocidad para A es:

$$\vec{J}_A = m_A\vec{v}_A = \vec{F}\Delta t = F\Delta t\ \ \hat{i} \Longrightarrow \vec{v}_A = \frac{F\Delta t}{m_A}\ \ \hat{i} = \frac{(200\ \ N)(0.5\ s)}{60\ \ kg} \approx 1.7...\ \frac{m}{s} \tag{3.24}$$

De forma análoga, la velocidad para B es:

$$\vec{v}_B = \frac{-F\Delta t}{m_B}\ \ \hat{i} = \frac{(-200\ \ N)(0.5\ s)}{80\ \ kg} \approx -1.25\ \frac{m}{s} \tag{3.25}$$

2. Verifique la conservación del momento lineal.

R: En este sistema, los patinadores parten del reposo, por lo que las velocidades iniciales de ambos patinadores son iguales a cero. Como la ecuación del momento lineal (ecuación 3.1) depende directamente de la velocidad, el momento lineal inicial es igual a cero, por lo que solo hay momento para el instante final. Esto es:

$$\begin{aligned} \sum \vec{P}_{inicial} = \vec{0} \ \ kg\frac{m}{s} = \sum \vec{P}_{final} = \vec{P}_A + \vec{P}_B = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B \\ = (60 \ \ kg)(1.6... \ \hat{i}\frac{m}{s}) + (80 \ \ kg)(-1.25 \ \hat{i}\frac{m}{s}) = (100 - 100) \ \ kg\frac{m}{s}\hat{i} = \vec{0} \ \ kg\frac{m}{s} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Es importante recordar que las fuerzas acción y reacción actúan sobre cuerpos distintos: $\vec{F_{BA}}$ actúa sobre A y $\vec{F_{AB}}$ actúa sobre B. Para cada cuerpo por separado, la fuerza neta no es cero durante el contacto y por eso cada uno adquiere aceleración, a pesar de conservar el momento lineal. Esto es, las fuerzas acción-reacción sí se cancelan cuando analizamos el sistema global (internas), pero no cuando analizamos cada cuerpo individualmente (allí producen aceleración).

3. Estime los desplazamientos de cada patinador durante el contacto.

R: Para calcular estas distancias, asumiendo que la aceleración es constante, se puede ocupar la ecuación 2.17 con una velocidad inicial y posición inicial igual a cero para ambos patinadores:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 = \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 \tag{3.27}$$

Las aceleraciones para cada patinador son proporcionales a la fuerza sobre la masa, como indica la segunda ley de Newton (ecuación 3.14):

$$\begin{aligned} \vec{a_A} &= \frac{F}{m_A} \ \ \hat{i} = \frac{200}{60}\frac{m}{s}\hat{i} = 3.333...\frac{m}{s}\hat{i}, \\ \vec{a_B} &= -\frac{F}{m_B}\hat{i} = -\frac{200}{60}\frac{m}{s}\hat{i} = 2.5\frac{m}{s}\hat{i} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Reemplazando en la ecuación 3.27:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= \frac{1}{2}\vec{a}_A\Delta t^2 = \frac{1}{2}3.333...\frac{m}{s}(0.5 \ s)^2\hat{i} \approx 0.42 \ m \ \ \hat{i} \\ \vec{r}_B &= \frac{1}{2}\vec{a}_B\Delta t^2 = \frac{1}{2}2.5\frac{m}{s}(0.5 \ s)^2\hat{i} \approx -0.31 \ m \ \ \hat{i} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Luego, las distancias recorridas son 42 cm y 31 cm para los patinadores A y B respectivamente.

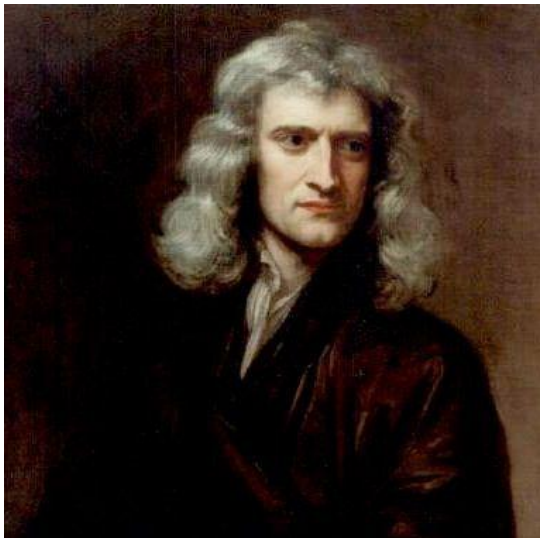


Figura 3.2: Sir Isaac Newton (1643-1727). Un dato curioso es que, según los registros de *Academic Tree*, Newton fue mentor de William Whiston, quien a su vez fue mentor de Jean-Louis Calandrini. La cadena maestro-estudiante continúa con Georges-Louis Le Sage, Simon L'Huilier, Charles François Sturm, Victor Alexandre Puiseux, Camille Jordan y C. L. Ferdinand Lindemann. Este último fue mentor de Ludwig Prandtl, considerado el padre de la aerodinámica moderna, quien tuvo como discípulo a Stephen P. Timoshenko, una de las figuras fundacionales de la mecánica de materiales moderna. La genealogía prosigue a través de Egor P. Popov, Michael Ortiz y Daniel Hurtado, hasta llegar a Patricio Venegas-Aravena, autor de esta obra y discípulo de este último. Así, a través de una sucesión de relaciones de mentoría académica que abarca más de tres siglos, esta genealogía establece un vínculo intelectual entre Newton y el autor de este libro (que ahora se expande con sus estudiantes que ahora leen estas líneas).

3.2. Muchas partículas

En mecánica, rara vez trabajamos con una sola partícula aislada. La mayoría de los sistemas físicos son colecciones de partículas que interactúan entre sí mediante fuerzas internas, y además pueden estar sometidas a fuerzas externas. Para estudiar estos sistemas, se introducen conceptos como el centro de masa, el momentum total, y la generalización de la Segunda ley de Newton a sistemas de muchas partículas.

3.2.1. Suma de masas y centro de masa

El centro de masas es esencialmente el promedio de las posiciones de todas las partes de un sistema, donde cada posición se pondera por la masa de esa parte. Este punto representa la ubicación promedio de la masa total del sistema y simplifica el análisis del movimiento de sistemas complejos al tratarlos como una sola partícula concentrada en ese punto. Si tenemos

un sistema de N partículas, cada una con masa m_i y posición $\vec{r}_i$, la masa total del sistema es:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{3.30}$$

La posición del centro de masa de este sistema se define como:

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i} \tag{3.31}$$

Note que aquí usamos $\vec{R}$, pero también es válido usar $\vec{r}_{CM}$.

En coordenadas cartesianas, la posición del centro de masa para cada coordenada es:

$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \tag{3.32}$$

La velocidad y aceleración del centro de masa se obtienen derivando la ecuación 3.31 respecto al tiempo:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i, \\ \vec{A} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \end{aligned}} \tag{3.33}$$

Para un objeto continuo, la suma se reemplaza por una integral, donde ρ es la densidad de masa ($= m/V$) (ver ecuación 3.46).

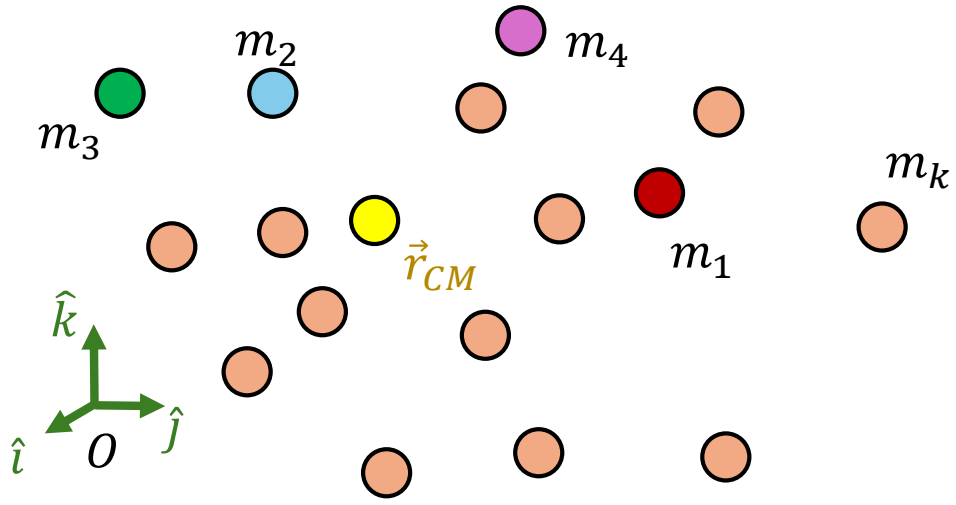


Figura 3.3: El centro de masas, que se encuentra en una ubicación $\vec{R}$ (también llamada $\vec{r}_{CM}$), corresponde a un ligar representativo de un sistema con partículas de diferentes masas. De forma análoga existen tanto velocidades como aceleraciones.

Ejercicio resuelto
Cuatro partículas están ubicadas en el plano xy. Sus masas y coordenadas son:

$$\begin{aligned} m_1 &= 3 \ \ kg \text{ en } (x_1, y_1) = (1, 2) \ \ m \\ m_2 &= 2 \ \ kg \text{ en } (x_2, y_2) = (-2, 3) \ \ m \\ m_3 &= 4 \ \ kg \text{ en } (x_3, y_3) = (0, -4) \ \ m \\ m_4 &= 1 \ \ kg \text{ en } (x_4, y_4) = (3, -1) \ \ m \end{aligned} \tag{3.34}$$

1. Determina la posición del centro de masa del sistema.

R: Primero, calculamos la masa total del sistema:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = (3 + 2 + 4 + 1) \ \ kg = 10 \ \ kg \tag{3.35}$$

Con esto, y usando la ecuación 3.32, podemos obtener el valor de las componentes del centro de masa:

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N=4} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{M} = \frac{(3*1 + 2*(-2) + 4*0 + 1*3) \ \ kg \cdot m}{10 \ \ kg} \\ \rightarrow X = 0.2 \ m \end{aligned} \tag{3.36}$$

De manera análoga, el centro de masa para la componente y es Y = -0.5 m. Por lo tanto, el centro de masas es $\vec{R}$ =(0.2,-0.5) m.

3.2.2. Momentum lineal y segunda ley de Newton para muchas partículas

El momento lineal para un sistema de partículas se calcula usando la masa total del sistema (ecuación 3.30) y la velocidad del centro de masa (ecuación 3.33), manteniendo la forma de la ecuación 3.1:

$$\boxed{\vec{P}_{cm} = M\vec{V}} \tag{3.37}$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton requiere de más trabajo ya que cada partícula es afectada por fuerzas externas sobre la partícula ($\vec{F}_i^{(ext)}$), pero también por las fuerzas de otras partículas, que podemos llamar fuerzas internas ($\vec{F}_{ij}^{(int)}$). Es decir, la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i. Esto significa que, para una partícula, la segunda ley de Newton (ecuación 3.14) se transforma en:

$$m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^{(ext)} + \sum \vec{F}_{ij}^{(int)} \tag{3.38}$$

Cuando se suma sobre todas las partículas, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{(int)} \tag{3.39}$$

Aquí hacemos notar dos cosas. La primera es que las fuerzas de cada partícula sobre sí misma son iguales a cero, implicando que $\vec{F}_{ii} = \vec{0}\ \ N$. Lo segundo es que, usando la Tercera ley de Newton, las fuerzas internas se anulan en pares. Esto es $\vec{F}_{ij}^{(int)} = -\vec{F}_{ji}^{(int)}$ por lo que el segundo término de la derecha en la ecuación 3.39 se anula, de modo que podemos escribir la segunda ley de Newton como:

$$\boxed{M\vec{A} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)}} \tag{3.40}$$

Esto demuestra que las fuerzas internas, como las que mantienen unida la estructura de un objeto, al cancelarse por pares, no afectan el movimiento global del centro de masa. Luego, el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en el centro de masa y sobre él actuara la fuerza externa total.

Ejercicio resuelto
Dos bloques de masas m_1=2 kg y m_2 =4 kg están unidos por una cuerda sin masa. El bloque 1 está en reposo sobre una mesa sin fricción. Una fuerza horizontal de 30 N actúa sobre el bloque 2.
1. Encuentre la aceleración del centro de masa.

R: La fuerza neta externa en la dirección horizontal es de 30 N (asumiremos que todo ocurre a lo largo de un único eje), mientras que la masa total es $M = m_1 + m_2 = 6\ kg$. Luego, usando la ecuación 3.40, tenemos que la aceleración es:

$$\vec{A} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(ext)} \rightarrow A = \frac{1}{6\ \ kg}30\ \ \ N = 5\ \ \frac{m}{s^2} \tag{3.41}$$

2. Demostrar que las fuerzas internas no afectan el centro de masa.

R: Aquí tenemos que identificar las fuerzas sobre cada bloque. Para el bloque 2 actúa una fuerza externa $F^{(ext)}$, mientras que la cuerda es el medio por el cual se transmite una fuerza interna (fuerza que afecta a ambas partículas). La denotaremos por T. Para el bloque 1 solo está la tensión, pero con signo negativo. Luego, la ecuación de movimiento para ambos bloques son:

$$\begin{aligned} T &= m_1 a, \qquad \text{para bloque 1} \\ F - T &= m_2 a, \qquad \text{para bloque 2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Note que en este sistema, ambas partículas tienen la misma aceleración debido a que la tensión transmite las fuerzas y también el movimiento. Sumando ambas ecuaciones:

$$F = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{30\ \ N}{6\ \ kg} = 5\ \ \frac{m}{s^2} \tag{3.43}$$

La aceleración de los bloques es la misma que la aceleración del centro de masa. Las fuerzas internas (tensión) son cruciales para el movimiento individual de cada bloque, pero se anulan entre sí al considerar el movimiento global del sistema.

3.2.3. Caso continuo

Cuando el número de partículas es muy grande (por ejemplo, un fluido o un sólido), se describe el sistema como un medio continuo con una densidad de masa $\rho(\vec{r}, t)$ (el cual es igual a $m(\vec{r}, t)/V$). Con esto, un diferencial de masa se puede escribir como:

$$dm(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)dV \tag{3.44}$$

Luego, la masa total se encuentra integrando todos los diferenciales de masa:

$$\boxed{M = \int dm = \int \rho(\vec{r}, t)dV} \tag{3.45}$$

Con esta misma idea, tenemos la posición, velocidad y aceleración del centro de masa para el caso continuo:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r}, t)\vec{r}(\vec{r}, t)dV \\ \vec{V} &= \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)dV \\ \vec{A} &= \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r}, t)\vec{a}(\vec{r}, t)dV \end{aligned}} \tag{3.46}$$

Ejercicio resuelto
Una barra uniforme de densidad ρ, longitud L y masa $m = \rho L$, se apoya sobre una mesa lisa. En el extremo derecho ($x = L$) se adhiere una masa puntual m_p.
1. Determinar la posición del centro de masa.

R: Cuando se dice que un objeto tiene una densidad uniforme, quiere decir que la densidad es constante a lo largo del objeto. Ahora bien, como la masa se expresa de la siguiente forma $m = \rho L$, tenemos que el diferencial de masa es $dm = \rho dx$, cumpliéndose que:

$$m = \int_0^L dm = \int_0^L \rho dx = \rho \int_0^L dx = \rho L \tag{3.47}$$

Para el centro de masa, usamos la ecuación 3.46, pero con el diferencial de línea dx:

$$R = \frac{1}{M}\int \rho r dV \rightarrow R_{barra} = \frac{1}{\rho L}\rho \int_0^L x dx = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2} \tag{3.48}$$

El sistema ahora deja de ser continuo al adherirse una masa en $x = L$, por lo que tenemos que volver a la ecuación 3.31. Con esto, el centro de masas del sistema completo es:

$$R = \frac{1}{M}\left(m\frac{L}{2} + m_p L\right) = \frac{m\frac{L}{2} + m_p L}{m + m_p} \tag{3.49}$$

Esto muestra cómo el centro de masa se desplaza hacia la partícula adherida.

Momento lineal y segunda ley de Newton continuas:
El momento lineal de un sistema continuo es la integral del momento infinitesimal ($d\vec{P}$) sobre todo el volumen del objeto (V). El momento infinitesimal se define como el producto de la velocidad de un elemento de masa infinitesimal (dm) y la velocidad de ese elemento ($\vec{v}$):

$$d\vec{P}_{cm} = \vec{v}(\vec{r},t)dm(\vec{r},t) \rightarrow \boxed{\vec{P}_{cm} = \int \vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)dV = M\vec{V}} \tag{3.50}$$

donde se ha usado la definición del elemento de masa (ecuación 3.44) y la velocidad del centro de masa del caso continuo (ecuación 3.46)
De manera análoga, la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\boxed{\sum \vec{F}^{(ext)} = M\vec{A} = \int \rho(\vec{r},t)\vec{a}(\vec{r},t)dV} \tag{3.51}$$

Ejercicio resuelto
Una barra delgada de longitud L se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción a lo largo del eje x. Su densidad de masa lineal varía como $\lambda(x) = \lambda_0\frac{x}{L}$ (se vuelve más densa hacia un extremo). Se aplica una fuerza externa horizontal constante $F^{(ext)}$ en el extremo de la barra en $x = L$.

1. Determina la aceleración del centro de masa.

R: Primero, hay que calcular la masa total, la cual es la integral de la densidad de masa lineal sobre la longitud de la barra. Es decir, resolver la integral de la ecuación 3.45, donde ρ pasa a ser λ y dV ahora es dx. Con esto:

$$M = \int_0^L \lambda(x)dx = \int_0^L \lambda_0 \frac{x}{L} dx = \lambda_0 \frac{L}{2} \tag{3.52}$$

Para la segunda ley de Newton, tenemos que la aceleración del centro de masa es (ecuación 3.51):

$$A = \frac{\sum F}{M} = \frac{F^{(ext)}}{\lambda_0 \frac{L}{2}} = \frac{2F^{(ext)}}{\lambda_0 L} \tag{3.53}$$

Este resultado muestra que la aceleración decrece a medida que la barra es más larga. También decrece si la densidad de referencia λ_0 aumenta.

3.3. Momento angular y torque

El **momento angular** $\vec{L}$ es una medida de la cantidad de rotación que tiene un objeto. Es una magnitud vectorial que depende de la masa, la velocidad y la distancia del objeto a un punto de referencia (eje de rotación). Para una partícula, se define como el producto vectorial de su vector de posición (r) y su momento lineal (P). Es decir, que combina dónde está la masa (posición) y cómo se mueve (momento lineal).

Matemáticamente, el momento angular $\vec{L}$ de un sistema con respecto al origen se define como la suma del producto vectorial (cruz) entre todas las masas y sus posiciones:

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)} \tag{3.54}$$

La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y se determina por la regla de la mano derecha.

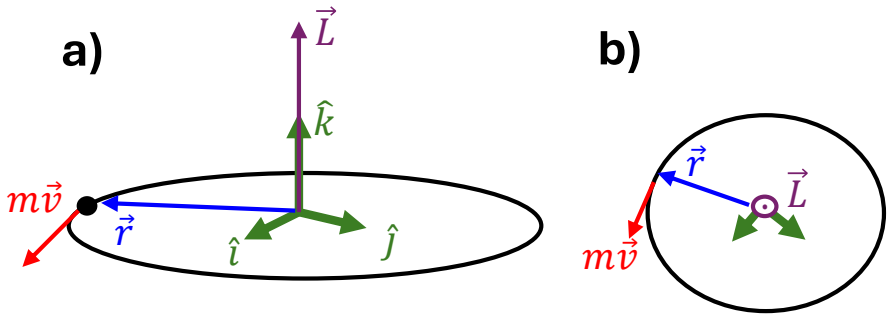


Figura 3.4: Momento angular para el caso de una sóla partícula. Esta es una primera aproximación relaiconada al capítulo de Vectores deslizantes.

Por otro lado, el **torque** $\vec{\tau}$, o momento de fuerza, es la capacidad de una fuerza para causar una rotación o cambiar el estado de rotación de un objeto. Es el análogo rotacional de la fuerza. El torque total es un vector que se define como la suma del producto vectorial del vector de las posiciones y de los puntos de aplicación de las fuerzas:

$$\boxed{\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{a}_i)} \tag{3.55}$$

Note que hay una relación directa entre el cambio de momento angular y el torque:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{P}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{P}_i}{dt} \right) = \sum_i \left(\vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}} \end{aligned} \tag{3.56}$$

donde el producto cruz para el mismo vector $(\vec{v}_i \times \vec{v}_i)$ es igual a cero. Con esto, el cambio de momento angular es igual al torque, lo cual es paralelo a la segunda ley de Newton (ecuación 3.13), donde el cambio de momento lineal es igual a la suma de fuerzas externas.
Adicionalmente, el momento angular se puede escribir en términos de la velocidad angular dada por la ecuación 2.53. Esto es:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \rightarrow mr^2\vec{\omega} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \Longrightarrow \boxed{\vec{L} = mr^2\vec{\omega}} \tag{3.57}$$

Ejercicio resuelto
1. Derivar la ecuación de movimiento para un péndulo simple de masa m y longitud l

R: Usando la ecuación 3.56, tenemos:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = ml^2\dot{\theta}\hat{k} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\hat{k} \tag{3.58}$$

donde la dirección $\hat{k}$, sale del plano en el que se encuentra el péndulo. Considerando la ecuación 3.56 sabemos que el cambio de momento angular es igual al torque y que este es igual a la posición multiplicado por la fuerza. Esto es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = -lF_g \sin(\theta)\hat{k} = -lmg \sin(\theta)\hat{k} \tag{3.59}$$

Note que el signo negativo nace por la regla de la mano derecha cuando se hace el producto vectorial entre la posición del péndulo y la gravedad. Equiparando las ecuaciones 3.58 y 3.59:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{3.60}$$

2. Obtener la aproximación de oscilador armónico para ángulos pequeños y calcular el período T aproximado.

R: Para ángulos pequeños, tenemos que $\sin(\theta) \approx \theta$, lo que implica que la ecuación 3.60 se aproxima a:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{3.61}$$

La solución a este tipo de ecuaciones diferenciales es del tipo sinusoidal: $\theta(t) = \sin(\omega_0 t)$, donde ω_0 es la frecuencia angular. Con esto, la frecuencia angular es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.62}$$

Lo que significa que la frecuencia disminuye a medida que la longitud del péndulo crece. Por otro lado, el período T se define como:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.63}$$

El período crece con $\sqrt{l}$, lo que significa que el tiempo que al péndulo le toma ir y volver crece con el largo del péndulo.

Ejercicio resuelto
Una bolita de masa m_b=0.05 kg se lanza horizontalmente con velocidad u=4.00 m/s y choca perfectamente de forma inelástica (se pega) con una masa m_p=0.45 kg del péndulo simple

(masa puntual al extremo de una varilla de masa despreciable de longitud l=0.6 m). El choque ocurre cuando el péndulo estaba en reposo, vertical.
1. Determine la velocidad angular inicial ω_0 del sistema pegado y su período.

R: La conservación del momento angular establece que este es igual para dos tiempos diferentes. Es decir que:

$$\boxed{\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}} \tag{3.64}$$

Inicialmente, solo la bolita tiene velocidad, lo que significa que el momento angular inicial (en el instante inmediatamente anterior a la colisión) es:

$$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{pendulo} + \vec{L}_{bolita} = \vec{L}_{bolita} = \vec{r}_{bolita} \times m_b \vec{v}_b \tag{3.65}$$

Si la bolita se acerca al péndulo por la izquierda y la posición con respecto al origen es el largo del péndulo l en la dirección hacia abajo, tenemos:

$$\vec{L}_{inicial} = \vec{r}_{bolita} \times m_b \vec{v}_b = l m_b u \hat{k} \tag{3.66}$$

Después del choque las dos masas quedan unidas y se mueven con velocidad angular ω_0. Esto nos indica que podemos usar la ecuación 3.57:

$$\vec{L}_{final} = mr^2 \vec{\omega} = (m_p + m_b) l^2 \omega_0 \hat{k} \tag{3.67}$$

Equiparando las ecuaciones 3.66 y 3.67 por ambos instantes, tenemos:

$$l m_b u = (m_p + m_b) l^2 \omega_0 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{m_b u}{(m_p + m_b) l} \tag{3.68}$$

Reemplazando los valores en la ecuación 3.68:

$$\omega_0 = \frac{(0.05\ kg)(\ 4\ m/s)}{(0.05{+}0.45\ kg)(0.6\ m)} = 0.666... \frac{rad}{s} \tag{3.69}$$

Usando la ecuación 3.63, tenemos que el período es $\sim 9.4\ s$.

3.4. Sistemas de dos partículas

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos partículas, de m_1 y m_2, posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_1$, se obtienen aplicando la Segunda ley de Newton a cada una de ellas por separado. Estas ecuaciones describen cómo la velocidad y la posición de cada partícula cambian debido a las fuerzas que actúan sobre ellas.
Cada partícula obedece a la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{f}_1 + \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f}_2 + \vec{F}_{12} \end{aligned} \tag{3.70}$$

donde $\vec{f}$ son las fuerzas externas y $\vec{F}$ son las fuerzas que se anulan entre sí por la tercera ley de Newton. Aquí puede resultar más conveniente trabajar con variables diferentes como lo son la posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y la masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Multiplicando por m_2 la primera ecuación en 3.70 y por m_1 la segunda, tenemos:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 &= m_2(\vec{f}_1 + \vec{F}_{21}) \\ m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= m_1(\vec{f}_2 + \vec{F}_{12}) \end{aligned} \tag{3.71}$$

Restando la segunda a la primera, tenemos:

$$m_1 m_2(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = m_2(\vec{f}_1 + \vec{F}_{21}) - m_1(\vec{f}_2 + \vec{F}_{12}) \tag{3.72}$$

Como $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12}$, tenemos que:

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = (m_1 + m_2)\vec{F}_{21} + m_2 \vec{f}_1 - m_1 \vec{f}_2 \tag{3.73}$$

Dividiendo por $M = m_1 + m_2$:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{21} + \frac{m_2 \vec{f}_1 - m_1 \vec{f}_2}{M} \\ \Longrightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{21} + \frac{m_2 \vec{f}_1 - m_1 \vec{f}_2}{M}} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Cuando tenemos el caso aislado, es decir, cuando no hay fuerzas externas $\vec{f}$, tenemos la ecuación:

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}} \tag{3.75}$$

Es decir, la dinámica relativa se reduce a la de una partícula 'efectiva' de masa μ bajo la fuerza interna $\vec{F}_{21}$ que depende de la separación r. Esta es la reducción clásica al problema de una partícula. Este tipo de ecuaciones es esencial para el tipo de interacciones entre dos partículas que están interactuando entre sí y cuya dinámica depende de la distancia entre dos puntos (como la gravedad o electromagnetismo).

Ejercicio resuelto
Dos masas m_1 =1.5 kg y m_2 =2.5 kg están unidas por un resorte de constante k=100 N/m. No hay fuerzas externas ni rozamiento. En el instante t=0 s, la masa relativa está elongada $r(0)$ =0.05 m desde el equilibrio y $\dot{r}(0)$= 0 m/s.
1. Encuentra la masa reducida.

R: Por definición, tenemos que:

$$\mu = \frac{1.5 \times 2.5\ kg^2}{1.5 + 2.5\ kg} \approx 0.93\ kg \tag{3.76}$$

2. La ecuación de movimiento relativa y su solución.

R: Para un resorte ideal, la fuerza interna es lineal con desplazamiento entre las masas, lo cual es conocido como **ley de Hooke**:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -k\vec{r}} \tag{3.77}$$

Donde k tiene unidades de fuerza sobre distancia (N/m). Esta fuerza siempre actúa en dirección opuesta al desplazamiento, de ahí su signo negativo, intentando restaurar al resorte a su forma original. Luego, la ecuación de movimiento (ecuación 3.75) es:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \tag{3.78}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación 3.61 para el péndulo simple. La solución general es:

$$\vec{r}(t) = (A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t))\,\hat{r} \tag{3.79}$$

donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{100 \;\; N/m}{0.93 \; kg}} \approx 10.36 \; \frac{rad}{s} \tag{3.80}$$

Aquí el período es $R = 2\pi/\omega_0 \approx 0.6 \; s$. Cuando el tiempo es cero, la función sin es igual a cero y cos es igual a 1, lo que implica que:

$$B = 0.05 \; m \tag{3.81}$$

Cuando se considera la velocidad:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \omega_0 \left(A\cos(\omega_0 t) - B\sin(\omega_0 t)\right)\hat{r} \tag{3.82}$$

tenemos que es cero para tiempo cerlo, lo que implica que $A = 0$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento final para este sistema es:

$$\vec{r}(t) = B\cos(\omega_0 t)\hat{r} \approx 0.05\cos\left(10.36t\right)\hat{r} \tag{3.83}$$

3. La amplitud de movimiento de cada masa respecto al centro de masa (cuánto se aleja cada masa).

R: Para realizar esto, tenemos que tomar como partida la ecuación del centro de masa (ecuación 3.31) y expresar cada posición en términos de $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} &\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r})) = \frac{1}{M}((m_1+m_2)\vec{r}_1 - m_2\vec{r}) \\ &\implies \vec{r}_1 = \frac{1}{M}M\vec{R} + m_2\vec{r} \rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}} \end{aligned} \tag{3.84}$$

De la misma forma para $\vec{r}_2$:

$$\boxed{\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}} \tag{3.85}$$

Con estas dos ecuaciones, podemos encontrar la amplitud de los desplazamientos considerando que el centro de masa está en reposo (ponemos el origen del sistema en el centro de masa y así $\vec{R} = \vec{0}$). Luego:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{2.5\ kg}{4\ \ kg} \approx 0.63r \\ r_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r = \frac{1.5\ kg}{4\ \ kg} \approx -0.38r \end{aligned} \tag{3.86}$$

Tomando la amplitud de la ecuación 3.81, tenemos que para la masa uno y dos, las amplitudes son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.63 \cdot 0.05 \approx 0.032\ m \\ A_2 &= 0.38 \cdot 0.05 \approx 0.019\ m \end{aligned} \tag{3.87}$$

3.5. Fuerzas centrales

Una fuerza central es aquella que siempre apunta directamente hacia o alejándose de un punto fijo en el espacio, llamado el centro de fuerza. La magnitud de esta fuerza solo depende de la distancia entre el objeto y el centro de fuerza. Un ejemplo clásico es la fuerza de gravedad entre dos cuerpos.
Una fuerza $F(r)$ que actúa sobre una partícula es una fuerza central si satisface dos condiciones:

1. Está dirigida a lo largo de la línea que conecta la partícula con el origen. Es decir, que magnitud depende solo de la distancia al centro:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}}, \quad r = |\vec{r}| \tag{3.88}$$

2. Produce un torque nulo con respecto al centro de fuerza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times F\hat{r} = \vec{0} \tag{3.89}$$

   Esto ocurre porque el producto cruz de dos vectores paralelos (en este caso, $\hat{r}$ sobre si mismo) es cero.

Una consecuencia directa de que el torque neto sea cero es la conservación del momento angular. Según la Segunda ley de Newton para la rotación, el momento angular ($\vec{L}$) de una partícula es constante si el torque neto que actúa sobre ella es cero (ecuación 3.56). Es decir:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow L = \text{constante}} \tag{3.90}$$

Esto significa que el movimiento de una partícula bajo una fuerza central siempre ocurre en un solo plano. El hecho de que el producto cruz de una fuerza sea cero, implica que, por propiedad de matemática vectorial, existe una función escalar V, cuyo gradiente determina la fuerza. Esto es:

$$\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}V(r)\hat{r} \tag{3.91}$$

Una forma de entender esta ecuación es por medio de la Figura 3.5. Se considera una función arbitraria f, la cual es no constante en el espacio. Por lo tanto, debe tener valores hacia donde crece (colores rojos) y otros hacia donde decrece (colores azules). La ecuación 3.91 representa justamente esce último escenario.

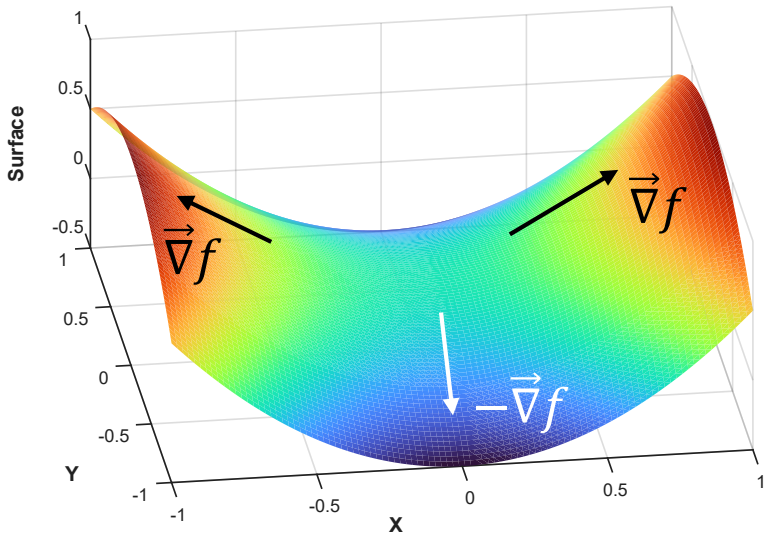


Figura 3.5: Ejemplo de como se puede interpretar un gradiente de una función f que depende de x e y. Las flechas negras indican la dirección de máximo crecimiento de esta función f. En cambio, la flecha blanca indica lo contrario: La dirección de mayor decrecimiento.

Ejercicio resuelto
Encontrar las ecuaciones de movimiento para una fuerza central.

R: Consideremos la fuerza de interacción dada para la ecuación de movimiento con masa reducida (ecuación 3.75) con una fuerza central:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r} \tag{3.92}$$

En coordenadas cilíndricas, la parte radial del movimiento (aceleración) está dada por la ecuación 2.82. Esto en la ecuación 3.92 nos queda:

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} &= F(r)\hat{r} \\ \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} &= 0\hat{\theta} \end{aligned} \tag{3.93}$$

La segunda ecuación indica que la integral del lado izquierdo es constante. Esto es:

$$\mu \int (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})dt = \mu r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{3.94}$$

Esta ecuación es la misma que la que se muestra en la ecuación 3.57 para el momento angular ($L = mr^2\dot{\theta}$), pero para la masa reducida. Por lo tanto, se confirma que L es constante para un sistema compuesto:

$$L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{3.95}$$

Si despejamos esta ecuación para obtener $\dot{\theta}$, tenemos que $\dot{\theta} = \frac{L}{r^2\mu}$. Si reemplazamos en la primera fórmula de la ecuación 3.93, tenemos que la ecuación de movimiento es:

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \mu\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3\mu^2}\right) = F(r) \rightarrow \boxed{\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3\mu^2} - \frac{F(r)}{\mu} = 0} \tag{3.96}$$

La cual es la ecuación general de movimiento para una órbita con una fuerza central.
2. Demostrar que el área barrida por unidad de tiempo es constante.

R: Este corresponde al enunciado de la **segunda ley de Kepler**, lo que se resume como *El radio vector que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales*, o matemáticamente como $\frac{dA}{dt}$ = constante (la primera establece que las órbitas de los planetas siguen una trayectoria elíptica).
Para demostrar esta ley, reconsideremos la ecuación 3.95:

$$L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{constante} \rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{L}{\mu} = \text{constante} \tag{3.97}$$

Si consideramos el elemento de área por unidad de tiempo de la ecuación 2.46, podemos ver que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta} = \frac{L}{2\mu} = \text{constante} \tag{3.98}$$

Lo que significa que el área barrida por una partícula con respecto a otra en un intervalo de tiempo es constante.

Capítulo 4

Fuerzas específicas y movimiento

A continuación, se describen en detalle algunas fuerzas y leyes fundamentales que rigen el movimiento de los cuerpos en diversos contextos, desde la escala planetaria hasta la macroscópica.

4.1. Ley de gravitación universal

La ley de Gravitación Universal establece que cada partícula en el universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros. Es una fuerza central y siempre atractiva. Esta ley, formulada por Isaac Newton, explica por qué los objetos caen a la Tierra y por qué los planetas giran alrededor del Sol. Matemáticamente:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}} \tag{4.1}$$

donde G es la constante de gravitación universal, cuyo valor es $G \approx 6.674{\times}10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$. Note que el signo negativo indica que es una fuerza atractiva. Otra de las características de la fuerza de gravedad es su universalidad, pues actúa entre todos los objetos que tengan masa, desde una manzana hasta planetas y estrellas. Su dependencia con $1/r^2$ significa que si duplicamos la distancia entre los cuerpos, la fuerza gravitatoria disminuye a una cuarta parte. Finalmente, la proporcionalidad al producto de masas indica que objetos más masivos (como la Tierra o el Sol) generan campos gravitatorios mucho más intensos.
Podemos definir el campo gravitatorio creado por una masa M en un punto a distancia r como:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r} \tag{4.2}$$

Su valor en la superficie de la Tierra es aproximadamente 9.8 m/s^2.

Ejercicio resuelto
Un satélite de m=500 kg orbita la Tierra a una distancia de r=7.0×10^6 m desde el centro terrestre.
1. Calcular la fuerza gravitatoria sobre el satélite y su velocidad orbital.

R: Para calcular la fuerza de gravedad, tenemos que conocer la masa de la Tierra M_T, la cual es aproximadamente 5.97 ×10^{24} kg. Luego, reemplazamos los datos en la ecuación 4.1:

$$F_{12} = -G\frac{m_T m_2}{r^2} = -(6.67 \times 10^{-11} \quad N \cdot m^2/kg^2)\frac{(5.97 \times 10^{24})(500)kg^2}{(7 \times 10^6)^2 \quad m^2} \approx 4 \times 10^3 \quad N \quad (4.3)$$

Para calcular la velocidad orbital, se iguala la fuerza de gravedad con la aceleración centrípeta (ecuación 2.108):

$$\begin{aligned} a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{F_{12}}{m} \rightarrow v = \sqrt{\frac{F_{12}r}{m}} = \sqrt{G\frac{m_T}{r}} = \sqrt{6.67 \times 10^{-11}\frac{5.97 \times 10^{24}}{7 \times 10^6}} \quad m/s \\ \Longrightarrow v \approx 7500 \quad \frac{m}{s} = 27000\frac{km}{h} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ejercicio resuelto
Demostrar la **tercera ley de Kepler**, la cual se enuncia como *El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita alrededor del Sol.* Es decir, que $T^2 \propto r^3$ (note que en el r es el radio circular, por lo que para que cumpla con la ley, se reemplaza por el semi eje mayor).

R: Para resolver este planteamiento, tenemos que considerar la ley de gravitación universal (ecuación 4.1) junto a la fuerza centrípeta (ecuación 2.108)

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} = F_G \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \quad (4.5)$$

Note que esta velocidad es la velocidad tangencial a la trayectoria, lo que significa que se puede relacionar con la velocidad angular como $v = r\omega \rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{r}{v}$, donde ω es la velocidad angular (ecuación 2.39). Usando la definición del período en función de la velocidad angular (ecuación 3.63), tenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.6)$$

Sustituyendo v, nos queda:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Longrightarrow \boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3} \quad (4.7)$$

donde el término en paréntesis es constante. Esta es la Tercera ley de Kepler en su forma newtoniana.

4.2. Fuerza elástica (ley de Hooke)

Cerca del equilibrio, muchas fuerzas restauradoras son aproximadamente proporcionales a la deformación:

$$\boxed{\vec{F} = -k\Delta\vec{r}} \tag{4.8}$$

donde k es la constante elástica y $\Delta\vec{r}$ la elongación respecto a la longitud natural $\vec{r}_0$. Esto es, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.

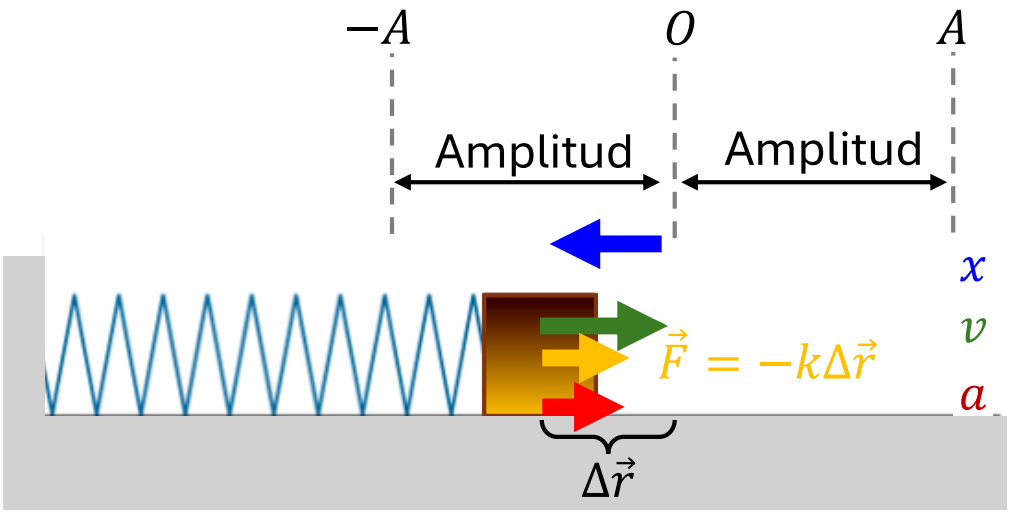


Figura 4.1: La fuerza elástica es una fuerza resititutiva. La flecha amarilla indica que la fuerza siempre está dirigida hacia el centro O el cual corresponde a la posición de equilibrio. Mientras mayor sea la elongación $\Delta\vec{r}$, mayor será la fuerza resititutiva. La posicuón de máxima elongación y compresión se conoce como *amplitud*.

Este tipo de fuerzas tiene varias aplicaciones, por ejemplo, un resorte entre dos bloques sobre una mesa de baja fricción. Si se separan ligeramente, el resorte tira de vuelta hacia la separación de equilibrio. La vibración de moléculas diatómicas, como el H_2 cerca del equilibrio también se puede describir con esta ecuación ya que el enlace químico se modela como un resorte efectivo.

Ejercicio resuelto
Encontrar la ecuación de movimiento para una cadena de masas unidas por resortes. Todas las masas son iguales, mientras que los resortes tienen la misma constante elástica.

R: Supongamos que queremos encontrar la fuerza sobre la n-ésima masa. Esto significa que hay una fuerza producto de la masa de la izquierda y otra producto de la masa de la derecha. Esto significa que la fuerza total sobre la masa n es la suma de ambas fuerzas. Esto es:

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{izq} + \vec{F}_{der} = m\ddot{\vec{u}}_n \tag{4.9}$$

Tomemos que la fuerza de la izquierda es producto de la masa $n-1$, por lo que la distancia es $\vec{r} = \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}$. Con esto, la fuerza izquierda es:

$$\vec{F}_{izq} = -k(\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}) = k(\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n) \tag{4.10}$$

La fuerza de la derecha es contraria a la fuerza de la izquierda, ya que empuja hacia el otro lado, por lo que el signo es positivo para esta fuerza. En término de desplazamiento, esta sería $\vec{r} = \vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n$. Luego, la fuerza de la derecha es:

$$\vec{F}_{der} = k(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n) \tag{4.11}$$

Sumando las ecuaciones 4.10 y 4.11 tenemos:

$$\vec{F}_{izq} + \vec{F}_{der} = k(\vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n) + k(\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n) = k(\vec{u}_{n+1} - 2\vec{u}_n + \vec{u}_{n-1}) \tag{4.12}$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación 4.9, tenemos la ecuación de movimiento para la n-ésima masa en esta cadena de resortes:

$$\boxed{m\ddot{\vec{u}}_n = k(\vec{u}_{n+1} - 2\vec{u}_n + \vec{u}_{n-1})} \tag{4.13}$$

La solución para este tipo de problemas nace de darse una solución del tipo:

$$u_n(t) = Ae^{i(\omega t - qn\Delta x)} \tag{4.14}$$

donde Δx es la separación de equilibrio entre masas, ω es la frecuencia angular de oscilación, A es la amplitud y q es el número de onda discreto (representa una medida de la frecuencia espacial de una onda, indicando cuántas ondas completas caben en una unidad de distancia dada).

4.3. Fricción

La fuerza de roce, también llamada fricción seca, es la fuerza que se opone al movimiento relativo entre dos superficies en contacto. Su dirección siempre es tangente a la superficie de contacto y actúa opuesta al movimiento relativo. Es fundamental para el movimiento, ya que sin ella sería imposible caminar, y los objetos se deslizarían sin control. Se clasifica en dos tipos principales: roce estático y roce cinético.

4.3.1. Roce estático

Es la fuerza que actúa sobre un objeto que no se mueve, previniendo el inicio del movimiento. Esta fuerza tiene una magnitud variable; se ajusta para ser igual y opuesta a la fuerza

aplicada, hasta que se alcanza un valor máximo. Dicho de otra forma, es la fuerza que impide que un objeto comience a moverse. Esta fuerza se define como:

$$f_s \leq \mu_s N \tag{4.15}$$

donde μ_s es el coeficiente de roce estático, un valor sin unidades que depende de las superficies en contacto, y N es la fuerza normal, la fuerza perpendicular que una superficie ejerce sobre la otra. El movimiento comienza solo cuando la fuerza aplicada excede el valor máximo del roce estático, $f_{s,\max} = \mu_s N$

4.3.2. Roce cinético

Esta es la fuerza que actúa sobre un objeto que ya está en movimiento. A diferencia del roce estático, su magnitud es constante y generalmente menor que la fuerza máxima del roce estático. Note que el mundo anglosajón se le conoce como roce cinético, en cambio en el mundo español se le conoce como roce dinámico. Aquí, la magnitud de la fuerza de roce cinético se define como:

$$f_k = \mu_k N \tag{4.16}$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética. Por lo general se tiene que $\mu_k < \mu_s$, indicando que la fricción es menor cuando un objeto está en movimiento.

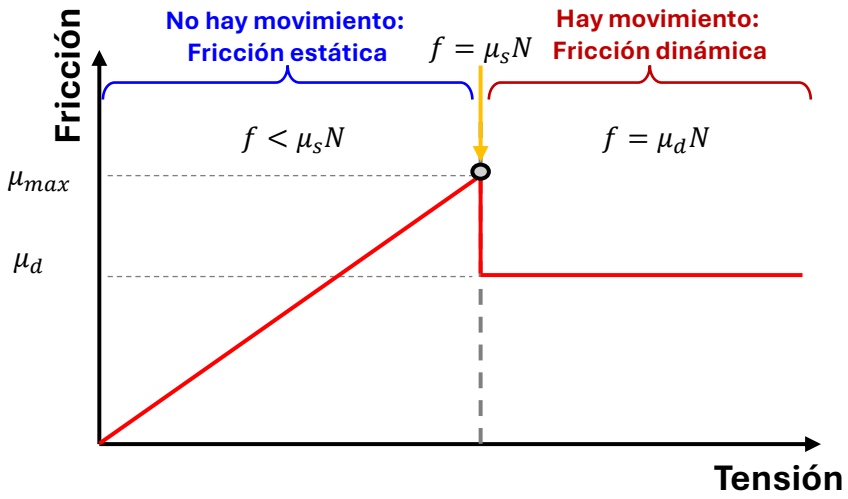


Figura 4.2: La fricción depende de la fuerza que se le aplica al sistema. Si la fuerza (en este caso la tensión) es baja, el bloque no se moverá y por tanto la fricción será baja. En cambio, si la tensión aumenta, el coeficiente de fricción estático también aumentará (el universo es "flojo"por lo que no quiere moverse y por tanto cuesta sacarlo del reposo). Llegará un punto en el que la tensión será exactamente igual a la fricción por lo que aquí diremos que la tensión es igual a la fricción estática. Luego, con cualquier tensión aún mayor tendremos que el bloque se mueve y por tanto su coeficiente de fricción dinámico μ_d (cinético μ_k en el mundo anglosajón) será menor.

Ejercicio resuelto
Un bloque de m= 2 kg está sobre un plano horizontal con coeficiente de fricción cinética μ_k=0.2 y fricción estática μ_s=0.4. Se aplica una fuerza constante F=10 N.
1. Determinar la fuerza mínima para iniciar el movimiento.

R: La fricción estática máxima se alcanza cuando $f_{s,\max} = \mu_s N$. En el caso de equilibrio en la componente vertical, tenemos que $N = mg$, por lo tanto, la fuerza es:

$$f_{s,\max} = \mu_s mg = (0.4)(2 \ \ kg)\left(9.8 \ \frac{m}{s^2}\right) \approx 15.7 \ N \tag{4.17}$$

Esto significa que la fuerza necesaria para un objeto de la inercia cuando la fricción está presente es mayor que cuando ya desliza (10 N).
2. Calcula la aceleración del bloque.

R: Para esta clase de ejercicios, se separan las componentes del movimiento: vertical y horizontal. En la componente vertical se aplica que la suma de fuerzas es cero (el bloque no se despega del plano), lo que implica que $N - mg = 0$, o que $N = mg$. Luego, la componente horizontal tiene las fuerzas de fricción y la fuerza aplicada F, lo que da como resultado la aceleración (segunda ley de Newton como muestra la ecuación 3.14). Esto es $F - f_k = F - \mu_k N = F - \mu_k mg = ma$. Con esto, la aceleración es:

$$a = \frac{F}{m} - \mu_k g \approx \frac{10 \ \ N}{2 \ \ kg} - (0.2)\left(9.81 \ \frac{m}{s^2}\right) \approx 3 \ \ \frac{m}{s^2} \tag{4.18}$$

3. Determina la velocidad después de 3 segundos.

R: Como el sistema parte del reposo, se puede considerar que la velocidad inicial es cero. Para un movimiento uniformemente acelerado usamos la ecuación 2.16:

$$v = v_0 + a\Delta t \approx 0 + \left(3 \ \ \frac{m}{s^2}\right)(3 \ \ s) = 9 \ \ \frac{m}{s} \tag{4.19}$$

4.4. Roce viscoso

La fuerza de roce viscoso, también conocida como fuerza de arrastre o fricción de fluido, es una fuerza de resistencia que se opone al movimiento de un objeto a través de un fluido como el aire o el agua. A diferencia del roce cinético para un objeto en movimiento sobre una superficie, esta fuerza depende directamente de la velocidad del objeto en un medio fluido. Para velocidades bajas, la relación matemática es lineal:

$$\vec{F} = -b\vec{v} \tag{4.20}$$

donde b es el coeficiente de viscosidad (en unidades de kg/s), que depende del objeto y del fluido. Al igual que las fricciones estáticas y cinéticas, el signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento.
La ecuación de movimiento (en una dimensión) para este tipo de sistemas es:

$$m\ddot{x} = F_{ext} - b\dot{x} \tag{4.21}$$

En caso que no hayan fuerzas externas, esta ecuación se transforma en:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0 \tag{4.22}$$

La solución para esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 e^{-(b/m)t} \\ x(t) &= x_0 + \frac{mv_0}{b}\left(1 - e^{-(b/m)t}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Esta solución significa que la velocidad del objeto, decayendo exponencialmente, tiende a detenerse en algún momento (velocidad tiende a cero). En el caso de un objeto que cae en un fluido y es afectado por una fuerza externa constante (gravitatoria), tenemos que la ecuación de movimiento ahora es:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = g \tag{4.24}$$

La solución para este sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_\infty\left(1 - e^{-(b/m)t}\right) \\ x(t) &= v_\infty\left(t - \frac{b}{m}\left(1 - e^{-(b/m)t}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde se ha supuesto que la velocidad inicial es cero y $v_\infty = \frac{mg}{b}$ (velocidad límite). Esta velocidad límite representa el caso en el que la fuerza viscosa se ha equiparado con la fuerza de gravedad. También, el factor $\tau = \frac{m}{b}$ se define como el tiempo característico y es el tiempo en que la velocidad alcanza aproximadamente el 63 % de v_∞.

Ejercicio resuelto
Una esfera de radio R=0.01 m y densidad ρ_s=800 kg/m^3 cae en glicerina (b=2.83 kg/s) bajo gravedad g=9.81 m/s^2.
1. Calcular la velocidad límite.

R: La velocidad límite es la razón entre el peso y el coeficiente de viscosidad. Para obtenerlo, necesitamos la masa, la cual es $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_s = \frac{4}{3}\pi(0.01\ m)^3(800\ \frac{kg}{m^3}) \approx 3.35{\times}10^{-2}\ kg$. Luego, la velocidad límite es:

$$v_\infty = \frac{mg}{b} \approx \frac{(3.35\times10^{-2}\ kg)(9.8\ \frac{m}{s^2})}{(2.83\ \frac{kg}{s})} \approx 0.1\ \frac{m}{s} \tag{4.26}$$

2. El tiempo aproximado para alcanzar el 95 % de la velocidad límite.

R: Este porcentaje significa que $\dot{x}$ de la ecuación 4.25 pasa a ser $0.95 \times v_\infty$. Esto significa que:

$$0.95 = 1 - e^{-(b/m)t} \rightarrow e^{-(b/m)t} = 0.05 \tag{4.27}$$

Aplicando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$(b/m)t = -\ln(0.05) \Longrightarrow t = -\frac{m}{b}\ln(0.05) \approx -\frac{(3.35 \times 10^{-2}\ \ kg)}{(2.83\ kg/s)}(-3) \approx 0.4\ s \tag{4.28}$$

En este resultado, tenemos que la esfera alcanza casi la totalidad de su velocidad límite en menos de medio segundo.

4.5. Integración numérica de ecuaciones de movimiento

La integración numérica es un método computacional para resolver ecuaciones diferenciales que no tienen una solución analítica o que son demasiado complejas para resolver a mano. En física, se utiliza para predecir el movimiento de un objeto cuando las fuerzas que actúan sobre él varían con la posición o el tiempo, como la resistencia del aire. En lugar de encontrar una fórmula exacta para la posición o velocidad, la integración numérica estima el estado del sistema en pequeños pasos de tiempo.

El algoritmo más simple para la integración numérica es el método de Euler. Se basa en la idea de aproximar la solución de la ecuación diferencial como una serie de pequeños pasos rectos. Si conoces la posición y la velocidad de un objeto en un instante de tiempo, puedes estimar su nueva posición y velocidad un instante después, asumiendo que la aceleración es constante durante ese pequeño intervalo.
Básicamente, toma el proceso de integración de la velocidad y posición de manera discreta (ecuaciones 2.8 y 2.13):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}\Delta t \tag{4.29}$$

Esto quiere decir que el instante posterior $n+1$, se calcula a partir de, o como resultado, de la dinámica anterior (en n). Esto se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n\Delta t, \qquad \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \frac{\vec{F}_n}{m}\Delta t} \tag{4.30}$$

Ejercicio resuelto
Una pelota de m=0.5 kg es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0=20 m/s. El aire ejerce una fuerza de arrastre que se opone al movimiento, dada por $F_d = -bv$, con b=0.1 kg/s. Usando el método de Euler con un paso de tiempo de Δt=0.1 s, calcule la velocidad y la posición de la pelota después del primer paso de tiempo (t=0.1 s).

R: Primero debemos definir las condiciones iniciales en el instante en el que parte la pelota. Esto es v_0=20 m/s y posición y_0= 0 m. Con esto, tenemos la posición en el instante posterior;

$$y_1 = y_0 + v_0 \Delta t = 0 + 20\frac{m}{s}0.1\ s = 2\ \ m \tag{4.31}$$

Para el caso de la posición, tenemos que las fuerzas son la gravedad y el roce viscoso ($F = -bv - mg$). Esto es:

$$\begin{aligned} v_1 = v_0 + \frac{F_0}{m}\Delta t = v_0 - \frac{bv_0 + mg}{m}\Delta t = 20\frac{m}{s} - \frac{(0.1kg/s)(20m/s) + (0.5\ kg)(9.8\ m/s^2)}{0.5\ kg}0.1\ s \\ \implies v_1 \approx 18.6\ \frac{m}{s} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Capítulo 5

Trabajo y energía

En los capítulos anteriores, establecimos la Dinámica a través del concepto de fuerza, utilizando las Leyes de Newton para vincular directamente la causa ($\vec{F}$) con el efecto ($\vec{a}$) en cualquier instante. Este enfoque, basado en la aceleración instantánea, ha sido en extremo útil para la humanidad, pero a menudo requiere resolver ecuaciones diferenciales, en ocasiones muy difíciles, para determinar la posición o la velocidad en un momento futuro.
Este capítulo introduce un método alternativo y fundamentalmente diferente para el análisis de sistemas dinámicos. En lugar de enfocarnos en las fuerzas y aceleraciones en un punto del tiempo, aquí nos centraremos en las cantidades escalares, Trabajo (W) y Energía (E), que dependen del movimiento a lo largo de una distancia o de un intervalo de tiempo.
El trabajo es la transferencia de energía que ocurre cuando una fuerza empuja o tira de un objeto, y este se mueve a través de una distancia. Es decir, la energía es la potencialidad para hacer que algo suceda, mientras que el trabajo es la acción concreta de mover o cambiar algo.

5.1. Trabajo y energía cinética

El **trabajo** realizado por una fuerza F al desplazar un punto material desde el punto a hasta el punto b es el integral de línea definido como:

$$\boxed{W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \tag{5.1}$$

El cual tiene unidades Nm o J (Joule). Para una fuerza constante, el trabajo se transforma en:

$$W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos(\theta) \tag{5.2}$$

Esta es una cantidad escalar (no tiene dirección) y su signo determina si la fuerza entrega energía al sistea ($W > 0$) o la extrae ($W < 0$). Consideremos que la fuerza es $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Esto se puede agregar a la ecuación del trabajo de la forma:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_a^b md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_a^b md\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_a^b mvdv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_a^b \tag{5.3}$$

Esto significa que el trabajo es el cambio de $\frac{1}{2}mv^2$, lo cual se define como **energía cinética** K:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2} \tag{5.4}$$

De esta forma, la relación entre el trabajo y la energía es:

$$\boxed{W_{a\to b} = \Delta K = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \tag{5.5}$$

Esta ecuación indica que el trabajo neto realizado sobre un objeto es igual al cambio en su energía cinética. Esto se conoce como el **Teorema de Trabajo-Energía**, el cual establece que cuando se aplica trabajo sobre un objeto, se le transfiere energía y su energía cinética cambia, lo que se manifiesta como un cambio en su velocidad.
El **trabajo** realizado por la **gravedad** se puede calcular reemplazando la fuerza de gravedad en la ecuación 5.5. Esto es:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\int_a^b dy = -mg(y_b - y_a) = mgh \Longrightarrow \boxed{\Delta K = mgh} \tag{5.6}$$

Esto significa que el cambio de energía potencial gravitatorio está directamente relacionado con la altura a la cual un objeto se ha movido. Dicho de otra forma, el trabajo que se requiere para cambiar la altura de un objeto es proporcional al cambio de altura.

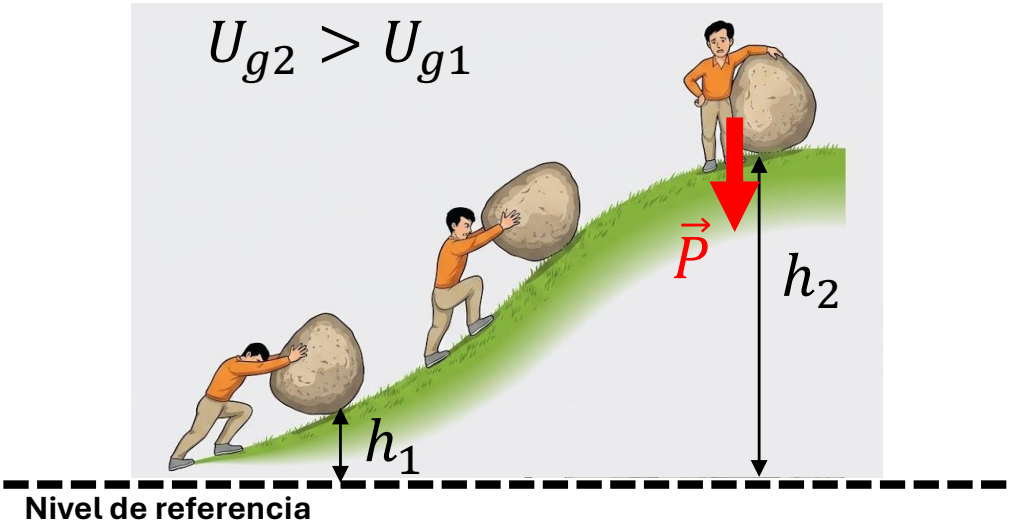


Figura 5.1: La energía potencial gravitatoria es mayor a medida que nos alejamos de un nivel de referencia.

Por otro lado, el **trabajo de un resorte** se obtiene considerando la fuerza descrita en la ecuación 4.8:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -k \int_a^b \vec{r} \cdot d\vec{r} = -k \int_a^b x dx = -\frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b \Longrightarrow \boxed{\Delta K = -\frac{1}{2}k(x_b^2 - x_a^2)} \tag{5.7}$$

Donde hemos escogido un largo natural $\vec{r}_0$ igual a cero y, por tanto, $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}$.

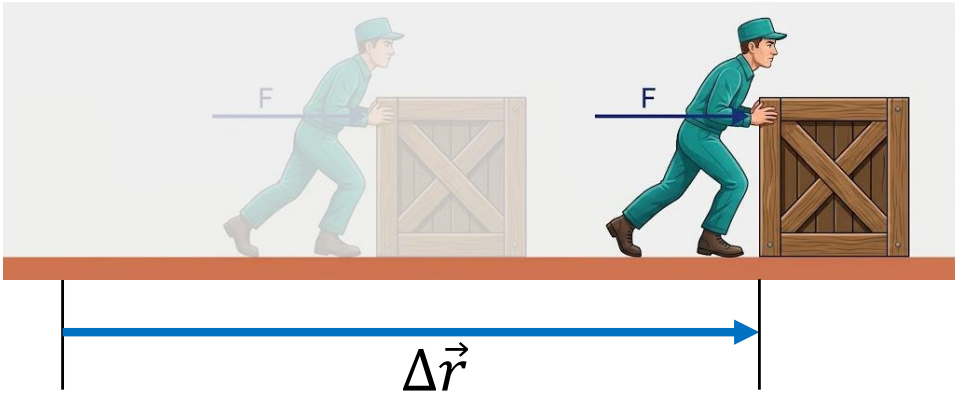


Figura 5.2: El trabajo de una fuerza está directamente relacionado con la trayectoria que recorre. Especificamente, el trabajo es la suma de todas las fuerzas paralelas a la trayectoria. En el caso del hombre que mueve la caja, se aplica una fuerza horizontal a lo largo de todo el camino.

Ejercicio resuelto
Una partícula de masa m=1.0 kg se mueve a lo largo del eje x. Una fuerza $F(x) = \gamma_0 x^2$ N actúa sobre ella, donde γ_0 es una constante igual a 2 N/m^2. Si inicialmente x=0 m con v_0=1.0 m/s, calcula la velocidad cuando x=2.0 m.

R: Partimos de la fórmula del trabajo:

$$W_{0\to 2} = \int_0^2 F dx = \int_0^2 \gamma_0 x^2 dx = \frac{\left(2 \ \frac{N}{m^2}\right)}{3}(2^3 \ \ m^3) \approx 5.3 \ Nm \tag{5.8}$$

De la ecuación 5.5, tenemos que el trabajo es igual a la variación de energía cinética. Con esto, podemos escribir:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = W \to \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2W}{m}}} \tag{5.9}$$

Con esta ecuación se puede corroborar que una entrega de trabajo al sistema (W positivo) aumenta la velocidad, mientras que un sistema que realiza trabajo disminuye su velocidad. Ahora, reemplazando los valores en la ecuación 5.9:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2W}{m}} \approx \sqrt{1 \ \frac{m^2}{s^2} + \frac{(2)(5.3 \ Nm)}{1 \ kg}} \approx 3.4 \ \frac{m}{s} \tag{5.10}$$

Luego, la velocidad final aumenta con esta fuerza aplicada, pasando de 1 a 3.4 m/s.

5.2. Potencia

La potencia (P) es la rapidez con la que se realiza trabajo o se transfiere energía. Una mayor potencia significa que la energía se transfiere en menos tiempo. Esto significa que la potencia es una medida de la eficiencia temporal en la realización de una tarea.
La **potencia media** P_{med} se define como el trabajo total realizado en un tiempo:

$$\boxed{P_{med} = \frac{W}{\Delta t}} \tag{5.11}$$

Por otro lado, la **potencia instantánea** P_{inst} es el límite de la potencia media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Es la derivada del trabajo con respecto al tiempo. Esto es:

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \boxed{P_{inst} = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{5.12}$$

Esta última expresión es especialmente útil para entender cómo la potencia está ligada al movimiento de un objeto. Las unidades son de $Watt$ y que equivalen a Joules sobre segundos J/s. Aquí es interesante relacionar la potencia con las unidades usualmente empleadas en el mundo de los motores. Se define un caballo de fuerza (horsepower HP) como:

$$1 \ \ HP \approx 746 \ \ W \tag{5.13}$$

Ejercicio resuelto
Un automóvil de masa m=1200 kg acelera horizontalmente desde v_0=0 m/s hasta v=30 m/s en t=10 s. Durante el movimiento, la resistencia del aire produce una fuerza F_r=0.5 v^2 N (con v en m/s).
1. Calcular la potencia instantánea requerida por el motor cuando v= 20 m/s.

R: Usando la segunda ley de Newton (ecuación 3.14), sabemos que hay que considerar las fuerzas a lo largo de la horizontal, lo cual acelera al automóvil ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$). Aquí tenemos dos fuerzas actando. Una es la fuerza del motor F_{motor} y otra es la resistencia del viento que

tiene una dirección opuesta a la del motor y a la aceleración (movimiento). Esto permite establecer la ecuación de movimiento de la forma:

$$F_{motor} - F_r = m\frac{dv}{dt} \rightarrow F_{motor} = F_r + m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow P_{motor} = \left(F_r + m\frac{dv}{dt}\right) v \tag{5.14}$$

En esta ecuación solo falta encontrar la aceleración. Usando la aceleración media (ecuación 2.12), tenemos que:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(30-0)m/s}{10 \ \ s} = 3 \ \ \frac{m}{s^2} \tag{5.15}$$

con esto, volvemos a la ecuación 5.14:

$$P_{motor}(v = 20 \ \ m/s) = \left(F_r + m\frac{dv}{dt}\right) v = \left(0.5 \times 20^2 \ \ N + (1200)(3) \ \ N\right)(20 \ \ m/s) = 76 \ \ kW \tag{5.16}$$

Es decir, que la potencia instantánea a 20 m/s es 76 kW.
2. Calcular la potencia media suministrada por el motor durante toda la aceleración.

R: La potencia media requiere el uso de la ecuación 5.11, lo que implica que hay que encontrar el trabajo realizado por el motor durante todo el proceso (W_{motor}). En este caso, tomamos la ecuación 5.5 para el trabajo y la aplicamos a nuestro sistema de fuerzas dado por la ecuación 5.14. Esto es:

$$F_{motor} - F_r = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \int F_{motor}dx - \int F_r dx = \int madx \Longrightarrow \boxed{W_{motor} = \Delta K + \int F_r dx} \tag{5.17}$$

donde se ha usado que el trabajo de la fuerza resultante ($F = ma$) es igual al cambio de energía cinética (ecuación 5.3). Por un lado, la energía cinética es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{1}{2}(1200 \ \ kg)(30^2 - 0^2 \ \ m^2/s^2) = 540000 \ \ J \tag{5.18}$$

Por otro lado, el trabajo del aire es:

$$W_r = \int_0^d F_r dx = 0.5v^2 \int_0^d dx = 0.5v^2 d \tag{5.19}$$

Esta ecuación nos dice que hay que encontrar la distancia recorrida cuando t es 10 segundos. Usando la aceleración de 3 m/s y la distancia recorrida para un movimiento uniformemente acelerado (ecuación 2.17), tenemos que d es:

$$d = d_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}3(10^2) \ \ m = 150 \ \ m \tag{5.20}$$

Ahora, junto a la velocidad media $v_{med} = \frac{v+v_0}{2}$ (que es igual a 15 m/s), reemplazamos los valores en la ecuación 5.19 :

$$W_r = 0.5v^2d = 0.5(15^2)150 \;\; J = 16875 \;\; J \tag{5.21}$$

Reemplazando los trabajos en la ecuación 5.17, tenemos que el trabajo del motor es:

$$W_{motor} = \Delta K + \int F_r dx = 540000 \;\; J + 16875 \;\; J = 556875 \;\; J \tag{5.22}$$

Ahora, aplicando la definición de potencia media (ecuación 5.11), tenemos que la potencia media del motor es:

$$P_{med-motor} = \frac{W_{motor}}{\Delta t} = \frac{556875}{10} \;\; W \approx 56 \;\; kW \tag{5.23}$$

Si se fijan, la potencia media del ciclo es menor a la potencia instantánea porque la potencia media también incluye la potencia al comienzo del movimiento, donde la resistencia del aire, que depende de la velocidad al cuadrado, es pequeña.

5.3. Energía cinética de un sistema

La energía cinética total de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas individuales que lo componen. Es la energía que el sistema posee debido al movimiento de sus partes.
Matemáticamente, esto se formula como:

$$\boxed{K_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^2} \tag{5.24}$$

Note que $\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$, el cual es un escalar. Si consideramos la velocidad de cada partícula como la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad de la partícula relativa al centro de masa ($\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i,rel}$), tenemos:

$$K_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{V} + \vec{v}_{i,rel})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} \cdot \vec{v}_{i,rel} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{i,rel}^2 \tag{5.25}$$

Si nos fijamos, el primer término de la derecha se puede reescribir como $\frac{1}{2}\vec{V}^2 \sum m_i = \frac{1}{2}M\vec{V}^2$ ya que la velocidad del centro de masa es la misma para todas las partículas. Por otro lado,

por definición, $\vec{v}_{i,rel} = \vec{v}_i - \vec{V}$. Esto significa que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} \cdot \vec{v}_{i,rel} = \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{i,rel} = \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}) = \vec{V} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} \right] \\ = \vec{V} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - M\vec{V} \right] = 0\end{aligned} \tag{5.26}$$

Esto es así por la definición de la velocidad del centro de masa dada por la ecuación 3.33. Con esto, la ecuación 5.25 para la energía cinética total se transforma en:

$$\boxed{K_{tot} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{i,rel}^2} \tag{5.27}$$

Esto es conocido como el **teorema de König-Huygens**, el cual establece que la energía cinética total de un sistema es la suma de la energía cinética de su centro de masa y la energía cinética del movimiento relativo de sus partículas con respecto a su centro de masa. Esto es:

$$K_{tot} = K_{CM} + K_{rel} \tag{5.28}$$



Figura 5.3: La energía cinética es la energía del movimiento. En este caso representado por un balón de baloncesto en movimiento.

Ejercicio resuelto

Considera un sistema de dos partículas en el plano xy, donde la masa de la partícula 1 y 2 son $m_1 = 2\ kg$ y m_2=3 kg respectivamente. Sus velocidades son v_1= (3,1) m/s y v_2= (-1,2) m/s.

1. Calcular la energía cinética total del sistema.

R: La energía cinética de cada partícula es dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$ (ecuación 5.4), por lo que la suma es (ecuación 5.24):

$$K_{tot} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_1^2 \tag{5.29}$$

La velocidad de las masas son:

$$v_1^2 = 3^2 + 1^2 \;\; (m/s)^2 = 10 \;\; (m/s)^2, \qquad v_2^2 = (-1)^2 + 2^2 \;\; (m/s)^2 = 5 \;\; (m/s)^2 \tag{5.30}$$

Luego, la energía cinética total es:

$$K_{tot} = \frac{1}{2}(2)(10) + \frac{1}{2}(3)(5) \;\; J = 17.5 \; J \tag{5.31}$$

2. Determinar la velocidad del centro de masa y calcular la energía cinética del sistema descompuesta según König-Huygens.

R: La velocidad del centro de masa se calcula usando la ecuación 3.33:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x}}{m_1 + m_2} = \frac{2*3 + 3*(-1)}{2+3} \;\; m/s = 0.6 \; m/s \\ V_y &= \frac{m_1 v_{1,y} + m_2 v_{2,y}}{m_1 + m_2} = \frac{2*(1) + 3*(2)}{2+3} \;\; m/s = 1.6 \; m/s \end{aligned} \tag{5.32}$$

Con esto, la velocidad del centro de masa es $\vec{V}$=(0.6,1.6) m/s. El módulo es V^2=2.92. Luego, la energía cinética del centro de masa es:

$$K_{CM} = \frac{1}{2}(2+3)(2.92) \;\; J = 7.3 \; J \tag{5.33}$$

Este corresponde a la energía cinética de traslación del sistema. Ahora, para calcular la energía cinética relativa, tenemos que calcular los vectores relativos. Estos son:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1,rel} &= \vec{v}_1 - \vec{V} = (3,1) - (0.6,1.6) \;\; m/s = (2.4,-0.6) \;\; m/s \\ \vec{v}_{2,rel} &= \vec{v}_2 - \vec{V} = (-1,2) - (0.6,1.6) \;\; m/s = (-1.6,0.4) \;\; m/s \end{aligned} \tag{5.34}$$

Esto implica que $\vec{v}_{1,rel}^2$ es igual a 6.12 $(m/s)^2$ y $\vec{v}_{2,rel}^2$= 2.72 $(m/s)^2$. Luego, la energía cinética relativa es:

$$K_{resl} = \frac{1}{2}(2)(6.12) + \frac{1}{2}(3)(2.72) \;\; J = 10.2 \; J \tag{5.35}$$

Podemos verificar esto al sumar las energías cinéticas, lo cual es $K_{CM} + K_{rel}$=7.3+ 10.2 J= 17.5 J, lo cual es efectivamente el valor de la energía total. Aquí, el valor de K_{rel} puede interpretarse como la energía cinética relacionada con el movimiento relativo de las partículas entre sí (energía interna del sistema).

5.4. Fuerzas conservativas y energía potencial

Las fuerzas conservativas son fundamentales para entender el principio de conservación de la energía mecánica. A diferencia de las fuerzas no conservativas como la fricción, el trabajo realizado por una fuerza conservativa solo depende de los puntos inicial y final, y no del camino seguido.
Específicamente, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula que se mueve entre dos puntos es independiente de la trayectoria que sigue. El trabajo realizado por una fuerza conservativa se puede expresar como el negativo del cambio en una cantidad llamada energía potencial U:

$$W_{cons} = \int_i^f \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = -\Delta U = -U_f - U_i \tag{5.36}$$

Luego, el trabajo realizado por esta fuerza solo depende del punto inicial y final, por lo que si estos puntos coinciden (inicial y final), tenemos que el trabajo realizado por dicha fuerza es cero. Al no realizar trabajo en un ciclo cerrado, decimos que dicha fuerza es conservativa. Esto también permite escribir la fuerza conservada como:

$$\boxed{\vec{F}_{cons} = -\vec{\nabla} U} \tag{5.37}$$

Note que el signo negativo indica que la fuerza conservativa siempre realiza trabajo opuesto al cambio en la energía potencial. Es decir, que es una convención de signos para que la disminución de la energía potencial se traduzca en una ganancia de energía cinética, y el aumento de la energía potencial corresponda a una pérdida de energía cinética, lo que está en línea con la conservación de la energía mecánica total. De esta forma, la energía mecánica E de una partícula (en ausencia de fuerzas no conservativas) se conserva, lo que lleva a la siguiente relación:

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{constante}} \tag{5.38}$$

Por lo tanto, en el caso de un sistema con fuerzas conservativas, la diferencia de energía mecánica en dos instantes es cero (valen la misma constante). Esto es $\Delta E = 0$. Demostremos esto usando la segunda ley de Newton (ecuación 3.14) para una fuerza conservativa. Con esto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{5.39}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$ tenemos:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{P}_{inst} = \frac{dW}{dt} \tag{5.40}$$

Como $dW = -dU$ (ecuación 5.36), escribimos:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt} \tag{5.41}$$

Ahora notamos que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{v}^2) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \\ \rightarrow \frac{d}{dt}(K+U) = 0 \\ \Longrightarrow \boxed{K+U = \text{constante} = E} \end{aligned} \tag{5.42}$$

Por lo que se demuestra la conservación de la energía mecánica E. Así, si la energía potencial aumenta, necesariamente la energía cinética debe decrecer y viceversa.

Ejericio resuelto
Una bola de masa m=1.0 kg se suelta desde el reposo desde una altura de h_i=5.0 m. Encontrar su velocidad justo antes de golpear el suelo. Ignore la resistencia del aire.

R: Inicialmente, la bola está en la cima, por lo que su velocidad inicial es cero. Esto implica que su energía cinética también es cero. Por otro lado, según la ecuación 5.6, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad (energía potencial) es $U = mgh$. Esto significa que la energía mecánica inicial es:

$$E_i = K_i + U_i = U_i = mgh_i = (1 \ \ kg)(9.8 \ m/s^2)(5 \ \ m) = 49 \ \ J \tag{5.43}$$

En el caso final, la energía cinética es máxima, pero la energía potencial es cero debido a que la altura h_f es cero. Esto es:

$$E_f = K_f + U_f = K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{5.44}$$

Usando la conservación de la energía mecánica, tenemos:

$$E_i = mgh_i = E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \Longrightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gh_i}} \tag{5.45}$$

Esta ecuación nos indica que la velocidad final de la caída no depende de la masa, sino que únicamente depende de la altura a la cual se suelta el objeto. Luego, reemplazando los valores, tenemos que $v_f = \sqrt{2(9.8 \ m/s^2)(5 \ \ m)} \approx 9.9 \ m/s$.

5.4.1. Ejemplo de fuerzas centrales

Las fuerzas centrales, como vimos en la Sección 3.5, solo dependen de la componente radial, lo que lleva a la conservación del momento angular (ecuación 3.90) cuyo valor es $L = \mu r^2\dot{\theta}$ (ecuación 3.95). Al igual que en la Sección 3.4, donde se define un sistema de dos partículas pero se trata como si fuera un sistema único, con un grado de libertad, se usa la misma idea para plantear una energía mecánica conservada usando la masa reducida $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$:

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(r) \tag{5.46}$$

donde $V(r)$ es un potencial radial. De acuerdo a la ecuación 2.82, $\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Usando el momento angular, tenemos que la ecuación para la energía mecánica es:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \tag{5.47}$$

Definiendo los dos términos de la derecha como un potencial efectivo:

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r), \tag{5.48}$$

La energía mecánica de una órbita es:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r)} \tag{5.49}$$

Es decir, se comporta como una partícula ficticia moviéndose en una dimensión bajo el potencial. Una interpretación del factor $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ es que es una energía potencial centrífuga, por tanto, no proviene de una fuerza real, sino que se debe a la inercia del cuerpo que tiende a seguir moviéndose en línea recta. Esto es, que manifiesta que la partícula tendería a salirse de la órbita si no existiera la fuerza central.

Note que la ecuación 5.49 implica que la Energía mecánica debe ser mayor a la energía potencia efectiva: $E > V_{ef}$ ya que de lo contrario, la energía cinética sería negativa lo cual es imposible. Esto es:

$$K = E - V_{ef} > 0 \quad \rightarrow \quad E > V_{ef} \tag{5.50}$$

Esta condición también puede interpretarse como un requisito de movimiento.

Ahora bien, este potencial efectivo V_{ef} (potencial físico más potencial centrífugo) se puede escribir en función de la ecuación reducida dada por la ecuación 3.75. Esto es:

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{dV_{ef}}{dr}\hat{r}} \tag{5.51}$$

Así, el problema se reduce a movimiento unidimensional en la coordenada radial bajo el potencial V_{ef}.

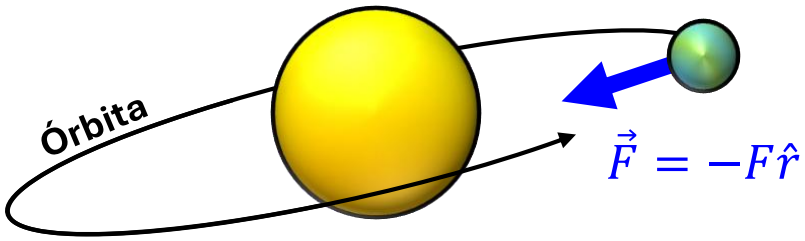


Figura 5.4: Las fuerzas centrales son útiles para describir sistemas como los planetas, los cuales tienen una fuerza de gravedad que siempre apunta hacia el centro de ellos.

Ejercicio resuelto
Encontrar el radio de una órbita circular.
R: Una órbita circular de radio r_0 corresponde a movimiento sin componente radial. Esto implica que sus derivadas temporales son cero (no se acerca ni se aleja): $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r}$ =0. Con esto, la energía mecánica, descrita por la ecuación 5.49 es igual al potencial efectivo:

$$E = V_{ef}(r_0) = \text{constante} \tag{5.52}$$

Por otro lado, la ecuación 5.51, para una fuerza central, también es igual a cero:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)\right) = \frac{L^2}{2\mu}\frac{d}{dr}r^{-2} + \frac{d}{dr}V(r) = 0 \tag{5.53}$$

Esta expresión depende del potencial gravitatorio, el cual cumple con la ecuación 5.37 ($\vec{F}_{cons} = -\vec{\nabla}U$). Para el caso gravitatorio, la fuerza es $\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ (ecuación 4.1). Esto implica que:

$$F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = -\nabla V = -\frac{d}{dr}V \Longrightarrow \boxed{V = -G\frac{m_1 m_2}{r}} \tag{5.54}$$

Si definimos $k = Gm_1m_2$, tenemos que el segundo término de la ecuación 5.53 es $\frac{k}{r^2}$, mientras que el primero es $\frac{L^2}{2\mu}(-2r^{-3})$. Luego, reemplazando en la misma ecuación, tenemos:

$$-\frac{L^2}{\mu r_0^3} + \frac{k}{r_0^2} = 0 \qquad \Longrightarrow r_0 = \frac{L^2}{\mu k} \tag{5.55}$$

Esa es la expresión general para el radio de una órbita circular en el problema de dos cuerpos (en términos de momento angular L, masa reducida μ y $k = Gm_1m_2$). Este resultado significa que si las masas aumentan, el radio de la órbita decrece. Entonces, para mantener dicho

radio con mayores masas, necesariamente debe aumentar el momento angular. Como este es proporcional a la velocidad angular (ecuación 3.57), tenemos que el aumento de las masas necesariamente debe hacer que el cuerpo gire más rápido para mantener la misma órbita.

5.5. Energía mecánica total no conservada

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema. En un mundo ideal sin fricción, esta energía se conservaría. Sin embargo, en el mundo real, fuerzas como la fricción y la resistencia del aire causan que parte de esa energía se "pierda"del sistema, transformándose en calor, sonido u otras formas de energía. A esto lo llamamos la no conservación de la energía mecánica. Matemáticamente, podemos tomar la descripción de la ecuación 5.38 donde, en vez de tener una diferencia igual a cero $\Delta E = 0$, tomamos que el trabajo de las fuerzas no conservativas W_{nc} es igual al cambio de energía mecánica. Esto es:

$$\boxed{\Delta E = W_{nc} = \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}} \tag{5.56}$$

Esto sucede porque, a diferencia del caso conservativo donde el trabajo depende de la energía inicial y final (ecuación 5.36), las fuerzas conservativas dependen del camino recorrido. Aquí, 'camino recorrido' quiere decir que el trabajo depende de la posición $\vec{r}$. En el caso conservativo, la fuerza depende del operador $\vec{\nabla}$, el cual para el caso radial es d/dr. Es este dr en el denominador que, al multiplicarse por dr de la ecuación de trabajo, hace que se elimine la contribución de la posición. Una fuerza no conservativa no se escribe en términos de ningún d/dr, por lo que al integrar dicha fuerza (multiplicar por dr), el camino quedará explícito. Si el trabajo de una fuerza no conservativa depende del camino, se puede dar que el trabajo de ida entre dos puntos dependa de una distancia L_{ida} mientras que el trabajo de vuelta dependa de una trayectoria diferente L_{vuelta} por lo que al sumar dichos trabajos, no sería cero, indicando que el sistema realizó trabajo neto. Esto no sucede con las fuerzas conservativas.

Ejercicio resuelto
Demostrar que Un bloque de masa m=3.0 kg se mueve sobre una superficie horizontal con fricción cinética μ_k=0.2. El bloque va del punto A al punto B siguiendo una línea recta de longitud L_0 =5.0 m. Luego vuelve de B a A por una trayectoria diferente de longitud L_1=8.0 m.
1. El trabajo total del ciclo $W_{ciclo} = W_{A\to B} + W_{B\to A}$.

R: Tenemos que la fricción cinética es $\vec{F}_{fr} = -\mu_k N\hat{t}$, donde, para este caso, $N = mg$. Luego, el trabajo de la fricción es:

$$W_{fr} = \int \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{r} = -\mu_k NL \tag{5.57}$$

Descomponiendo entre los dis trayectos, tenemos:

$$W_{ciclo} = W_{A\to B} + W_{B\to A} = -\mu_k mg(L_0 + L_1) = -(0.2)(3\ \ kg)(9.8\ m/s^2)(5+8\ \ m) \approx -76\ \ J \tag{5.58}$$

Si la fuerza fuera conservativa (por ejemplo, gravedad o resorte ideal), el trabajo total sobre un ciclo cerrado siempre sería cero. Esto significaría que la energía mecánica se recuperaría al regresar al punto inicial.En cambio, la fricción disipa energía en forma de calor, por eso tenemos que el trabajo no es cero. De hecho, el trabajo se aleja más de cero a medida que la distancia aumenta, implicando que se pierde más energía en el sistema por medio de la disipación de calor, propio de la fricción. Otra forma de notar esto es que la fricción siempre es opuesta al movimiento. Así, si una masa se mueve en la dirección $d\vec{r}$, la fuerza irá en la dirección contraria, por lo tanto, el factor $\vec{F}_{fr}\cdot d\vec{r}$ siempre tendrá signo negativo independiente de si se mueve del punto A a B y viceversa. Esto hace que, en el caso en el que la trayectoria sea exactamente igual de ida y vuelta, los trabajos realizados no se puedan restar y hacerse cero, sino que se suman. Esto sería $W_{ciclo} = W_{A\to B} + W_{B\to A} = -\mu_k mg(2L) \neq 0$.

Capítulo 6

Equilibrio y oscilaciones

El estudio de las oscilaciones, como el movimiento de un péndulo o un resorte, se simplifica enormemente usando los conceptos de energía, los cuales fueron presentados en el capítulo anterior. La energía potencial en un sistema oscilatorio se relaciona directamente con las fuerzas restauradoras que causan la oscilación. Un sistema oscilatorio, como un péndulo o un resorte, se mueve alrededor de una posición central conocida como punto de equilibrio.

6.1. Energía potencial y equilibrio

Un oscilador armónico simple es un sistema en el que la fuerza restauradora es directamente proporcional al desplazamiento desde el punto de equilibrio y siempre apunta hacia él. El ejemplo más común es el de una masa unida a un resorte. Usando la ley de Hooke (ecuación 3.77), podemos encontrar la **energía potencial elástica** usando la definición dada por la ecuación 5.36:

$$\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_i^f (-k\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{k}{2}r^2\Big|_i^f = \frac{k}{2}(r_f^2 - r_i^2) \Longrightarrow \boxed{U(x) = \frac{k}{2}x^2} \tag{6.1}$$

Note que, a pesar de que tanto el potencial como la fuerza dependen de la posición, se dice que esta fuerza es conservativa debido a que el sistema solo puede desplazarse a lo largo de un único eje. Por lo tanto, el camino de A a B es el mismo que el de B a A. Esto haría que $r_i^2 - r_f^2$ sea igual a cero y por tanto, la energía potencial del ciclo sea cero (requisito para que una fuerza sea conservativa). Si usamos la nomenclatura x (ecuación encerrada), este mide la posición con la cual se aleja del punto de equilibrio (definido en cero). Así, cuando $x = 0$, el sistema está en equilibrio, el resorte no ejerce fuerza y por tanto, no hay energía potencial elástica acumulada en el sistema. Es decir, ese es un **punto de equilibrio estable**, al cual tiende el sistema. Con esto, se puede establecer la energía mecánica total de un oscilador armónico :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2} \tag{6.2}$$

Ejercicio resuelto
Considere una masa m=0.2 kg está unida a un resorte de constante k=50 N/m. La masa se desplaza 0.15 m desde el equilibrio. Calcular: La energía potencial máxima y la velocidad máxima de la masa.

R: Por la definición dada en la ecuación 5.38 tenemos que la energía potencial es máxima cuando la energía cinética es mínima (y viceversa). Esto significa que, para que la energía cinética sea mínima, tiene que necesariamente valer cero. Esto es:

$$E_0 = K + U_{max} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(50 \ \ N/m)(0.15^2 \ \ m^2) \approx 0.56 \ J \tag{6.3}$$

Ahora, la velocidad máxima se encuentra cuando la energía potencial elástica es cero. Esto significa que toda la energía potencial se ha convertido en movimiento. Esto es:

$$E_0 = K_{max} + U = k_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = U_{max} \Longrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2U_{max}}{m}} \approx \sqrt{\frac{2 * 0.56 \ J}{0.2 \ kg}} \approx 2.37 \ \frac{m}{s} \tag{6.4}$$

Esto significa que la velocidad máxima aumenta con la raíz cuadrada de la energía potencial elástica máxima.

6.2. Pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio

El concepto de pequeñas oscilaciones se refiere al movimiento de un sistema físico que ha sido ligeramente perturbado de su punto de equilibrio estable. Para una pequeña perturbación, la mayoría de los sistemas, sin importar su complejidad, pueden aproximarse a un oscilador armónico simple. Este principio es fundamental en física e ingeniería, ya que simplifica enormemente el análisis de la estabilidad de un sistema.
Como ya vimos, un punto de equilibrio estable es aquel que, si se desplaza ligeramente la partícula, la fuerza resultante la devuelve al punto de equilibrio x_0. Matemáticamente, un punto de equilibrio de una función es aquel en el que su derivada es cero, indicando que los puntos cercanos o son todos mayores o todos menores. En el caso del equilibrio estable, los puntos vecinos a este punto de equilibrio son mayores. Si tomamos la ecuación para una fuerza conservativa (ecuación 5.37) tenemos que la fuerza es igual a la primera derivada del potencial elástico ($F = \frac{dU}{dx}$), por lo que la condición de equilibrio exige que la fuerza sobre una masa sea igual a cero. Esto es:

$$F_{elast} = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0 \tag{6.5}$$

Aquí, usando el análisis diferencial, se puede establecer que la segunda derivada dictamina si un punto de equilibrio es estable o inestable. Si la segunda derivada del potencial es positiva, indica que la función de energía potencial tiene una concavidad hacia arriba, es decir, un mínimo local. Luego, si la segunda derivada de la energía potencial es positiva en un punto de equilibrio, se tiene que este es un punto de equilibrio estable:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} > 0, \qquad \text{Punto de equilibrio estable} \tag{6.6}$$

En caso contrario, tenemos que:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} < 0, \qquad \text{Punto de equilibrio inestable} \tag{6.7}$$

Si desplazamos la partícula un poco de su punto de equilibrio, es decir, la posición pasa a ser $x = x_0 + \eta$ con $|\eta| \ll 1$, la fuerza que actúa sobre ella cambia ligeramente. Para describir ese cambio linealmente, aproximamos el potencial usando una expansión de Taylor ($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$) alrededor de x_0:

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x_0}(x-x_0)^3 + ... \tag{6.8}$$

Como la primera derivada cerca de un punto de equilibrio es cero (ecuación 6.5) y $(x-x_0)^2 \gg (x-x_0)^3$ para pequeñas oscilaciones, el potencial se puede aproximar a:

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}k_0(x-x_0)^2 \tag{6.9}$$

donde $k_0 = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}$. Si consideramos la derivada con respecto a x, tenemos que

$$-\frac{d}{dx}U(x) \approx -\frac{d}{dx}U(x_0) - \frac{d}{dx}\frac{1}{2}k_0(x-x_0)^2 = -k_0(x-x_0) = F \tag{6.10}$$

Esto es exactamente la ley de Hooke, lo que establece que las fuerzas que oscilan en torno a un punto de equilibrio estable son análogas a la fuerza restitutiva descrita por un resorte.
Volviendo a la definición de $x - x_0 = \eta$, podemos escribir la ecuación de movimiento en el caso en el que no haya más fuerzas:

$$\boxed{m\ddot{\eta} + k_0\eta = 0} \tag{6.11}$$

Esta tiene la misma forma que la ecuación de movimiento para la ley de Hook dada por la ecuación 3.78, lo que implica que la frecuencia angular es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{6.12}$$

Mientras que el período es $T = 2\pi/\omega_0$ (ecuación 3.63).

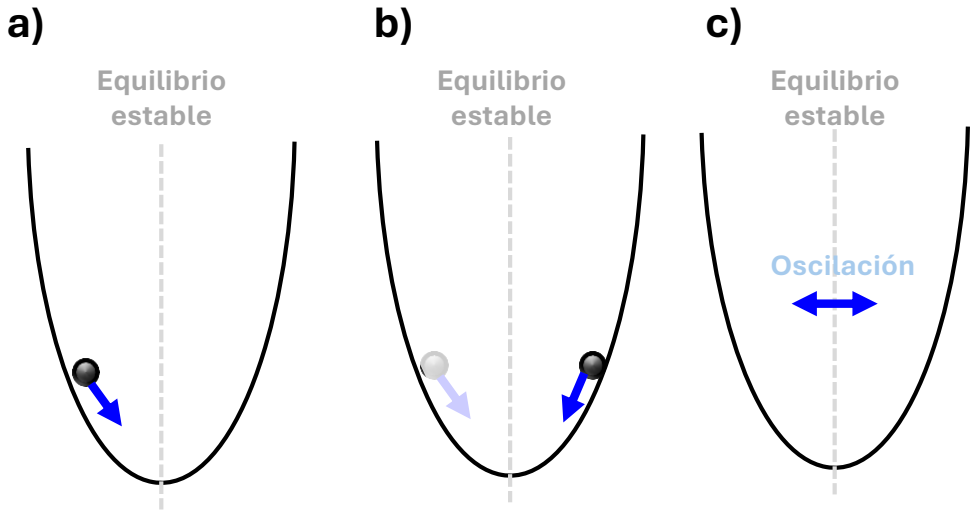


Figura 6.1: Una forma de entender estas oscilaciones es por medio del siguiente diagrama: en a tenemos que una partícula quiere bajar por una superficie, hacia donde se indica con la flecha azul. No obstante, la inercia de ese movimiento hace que la partícula pase de largo hasta la posición mostrada en b. Finalmente, si esto ocurre siempre, la trayectoria de la partícula es descrita por una oscilación en torno al punto de equilibrio estable (línea gris segmentada).

Ejercicio resuelto
Una partícula de masa m=0.2 kg se mueve sobre un plano horizontal bajo la acción de un potencial $U(x) = x^4 - 4x^2$ J, con x en metros.
1. Encontrar los puntos de equilibrio y determinar cuáles son estables y cuáles inestables.

R: Para encontrar los puntos de equilibrio, basta con derivar e igualar el potencial a cero, como muestra la ecuación 6.5. Esto es:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 4x^2) \;\; J/m = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) \;\; J/m = 0 \;\; J/m \tag{6.13}$$

De quí observamos que la condición se cumple cuando $x = 0$ y cuando $x = \pm\sqrt{2}$. Ahora, para determinar cuáles de estos tres puntos son estables o no, derivamos el potencial por segunda vez. Esto es:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12x^2 - 8 \;\; J/m^2 \tag{6.14}$$

Para el caso $x = 0$ tenemos que el resultado es -8, lo cual es negativo y, por tanto, es un punto inestable. Para el caso de la raíz de dos, ambos valores (su versión negativa y positiva) están elevados al cuadrado, lo que indica que no es relevante el signo. Esto da 16 y que es positivo para ambas raíces, indicando que ambos son puntos estables.

2. Encontrar la frecuencia lineal f.

R: La ecuación de movimiento para este sistema está dada por la ecuación 6.11 y, por tanto, tiene frecuencia angular dada por la ecuación 6.12. Esto implica que la frecuencia lineal es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{6.15}$$

El enunciado nos indica cuál es la masa pero no nos indica cuál es el valor de k_0. La definición de k_0 es la de la segunda derivada evaluada en los puntos de equilibrio estables (no tiene sentido evaluarlo en los puntos de equilibrio inestables ya que la masa no vuelve al lugar de origen una vez que la partícula se desplaza). Este valor es igual a 16 para los puntos de equilibrio estables. Luego, la frecuencia de oscilación lineal es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_0}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{16 \;\; J/m^2}{0.2 \; kg}} \approx 1.42 \; \frac{1}{s} = 1.42 \; Hz \tag{6.16}$$

6.3. Oscilador con dos masas y dos resortes

Un sistema de dos masas y dos resortes, donde uno de los resortes está anclado a una pared, es un ejemplo clásico de un sistema con dos grados de libertad. Esto significa que se necesitan dos coordenadas para describir completamente su movimiento. Este es un sistema fundamental para entender los modos normales de vibración, el cual hace referencia a los patrones fundamentales de movimiento de un sistema (como una cuerda o una molécula) en el que todos sus componentes se mueven con la misma frecuencia y una relación de fase fija.

Matemáticamente, este problema se puede formular de la siguiente manera: Considera dos masas, m_1 y m_2, conectadas por resortes con constantes elásticas k_1 y k_2. El resorte k_1 se conecta a una pared, mientras que el resorte k_2 se conecta entre las dos masas. Las posiciones de las masas se denotan como x_1 y x_2 desde sus posiciones de equilibrio. A modo de esquema, esta situación es:

Pared$\vert - - k_1 - - \boxed{m_1} - - k_2 - - \boxed{m_2}$	Largo natural
Pared$\vert - - - k_1 - - - - \boxed{m_1} - - - k_2 - - \boxed{m_2}$ $\vert - x_1 - \vert$ $\vert - x_2 - \vert$ despl. despl.	Largo despues de ejercer una fuerza

Las fuerzas que se ejercen sobre m_1 son dos. Una que ejerce el resorte de la izquierda (k_1), tratando de tirar la masa hacia la pared, y otra que ejerce el resorte de la derecha (k_2), intentando mover la masa m_1 hacia la derecha, donde se encuentra m_2.

La fuerza hacia la pared de la masa m_1 es $F_{pared} = -k_1 x_1$, mientras que la fuerza del resorte también depende de una distancia. Llamémosla δ. Aquí hay que entender que si el desplazamiento de las masas es $x_1 = x_2$, tenemos que las masas no alargan ni encogen el resorte. En cambio, si $x_1 > x_2$ tenemos el caso en el que el resorte se ha acortado. Por lo tanto, $x_1 - x_2 < 0$, lo que implica que hay una fuerza negativa hacia la izquierda. Si tenemos que $x_2 > x_1$, el resorte está estirado, lo que implica que $x_1 - x_2 > 0$ y por tanto existe una fuerza hacia la derecha. Esto nos permite concluir que la distancia δ es igual $x_1 - x_2$, lo que determina la fuerza del resorte: $F_{res \to m_1} = -k_2(x_1 - x_2)$. La fuerza que el resorte ejerce sobre la segunda masa es exactamente la fuerza del resorte pero en dirección opuesta: $F_{res \to m_2} = k_2(x_1 - x_2)$. Con esto, la segunda ley de Newton para ambas masas es:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \qquad \text{Para masa } m_1 \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2(x_1 - x_2) = k_2 x_1 - k_2 x_2, \qquad \text{Para masa } m_2 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

De una forma más compacta, este sistema de ecuaciones se escribe como:

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0} \tag{6.19}$$

donde la masa y las constantes elásticas se han reagrupado como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Donde las coordenadas y su segunda derivada son:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

Esta forma de escribir un sistema de ecuaciones en forma matricial es similar a la de una ecuación de movimiento para una sola partícula (como la mostrada en la ecuación 6.11). Esta simplicidad también se puede aplicar a la energía. Por ejemplo, la energía cinética y potencial del sistema se puede escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}, \qquad U = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{6.22}$$

donde el símbolo ^{T} significa matriz transpuesta. Ahora bien, para encontrar la solución de la ecuación 6.19, planteamos una solución sinusoidal del tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\sin(\omega t)$, lo que implica que su segunda derivada temporal sea $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 \mathbf{x}(t)$. Al reemplazar esto en la ecuación 6.19 nos queda:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \tag{6.23}$$

El término entre paréntesis es:

$$\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

Como ya tenemos la solución general (sinusoidal), tenemos que encontrar el parámetro ω para poder describir el movimiento de cada masa, para lo cual usamos el determinante igual a cero que es, en esencia, una forma de resolver un sistema de ecuaciones para ω. Es decir:

$$\boxed{\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0} \tag{6.25}$$

Recordando del álgebra lineal, un determinante es:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{6.26}$$

Para el caso de este ejercicio, el determinante es:

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = 0 \tag{6.27}$$

Usando el cambio de variable $y = \omega^2$, tenemos una ecuación de segundo grado:

$$y^2(m_1m_2) - y(m_2(k_1 + k_2) + m_1k_2) - k_1k_2 = y^2a + yb + c = 0 \tag{6.28}$$

donde $a = m_1m_2$, $b = -m_2(k_1 + k_2) - m_1k_2$ y $c = -k_2^2$. La solución para y es la solución para un sistema de segundo grado:

$$\boxed{y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \omega^2} \tag{6.29}$$

Este sistema tiene 4 soluciones para ω. No obstante, notamos que $\omega = \pm\sqrt{y}$, lo que significa que las soluciones son $\pm\omega_1$ y $\pm\omega_2$. Físicamente, solo tomamos las raíces positivas, lo que significa que este sistema solo tiene dos modos de vibración. Uno es donde las masas se mueven en fase (juntas), mientras que la segunda es cuando las masas se mueven en oposición de fase (una va a la derecha mientras que la otra va a la izquierda y viceversa).
Para encontrar las amplitudes A_1 y A_2, basta con multiplicar la ecuación 6.24 por $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

Al considerar la primera línea, tenemos $(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)A_1 - k_2A_2 = 0$. Despejando:

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 + k_2 - \omega^2 m_1}{k_2}} \tag{6.31}$$

Ejercicio resuelto
Considere los siguientes datos: $m_1 = m_2$=1 kg, k_1=100 N/m y k_2= 50 N/m.
Calcular las frecuencias y amplitudes para este sistema.

R: Con estos datos podemos calcular directamente los valores de a, b y c para obtener las frecuencias de vibración. Estas son: $a = m_1 m_2$=(1)(1) kg^2, $b = -m_2(k_1+k_2) - m_1 k_2$ =-(1)(100 +50)-(1)(50) $kgN/m = -200$ Nkg/m y $c = k_1 k_2$=(100)(50) N^2/m^2. Luego, las soluciones para y (ecuación 6.29) son:

$$y_1 \approx 29.3 \ s^{-2}, \qquad y_2 \approx 170.7 \ s^{-2} \tag{6.32}$$

Esto implica que las frecuencias naturales son :

$$\omega_1 \approx 5.4 \ rad/s, \qquad \omega_2 \approx 13.1 \ rad/s \tag{6.33}$$

Para encontrar las amplitudes, tenemos que estas también son dos. La primera es para el modo uno (usando la ecuación 6.31)

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \approx \frac{120.7}{50} \approx 2.4, \qquad \text{Modo I} \\ \frac{A_2}{A_1} &= \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_1}{k_2} \approx \frac{-20.7}{50} \approx -0.4, \qquad \text{Modo II} \end{aligned} \tag{6.34}$$

Esto quiere decir que la solución negativa es la que está a contrafase, mientras que la solución positiva es la que describe masas que se mueven en el mismo sentido.
Antes de plantear la solución general, es importante mencionar que uno puede normalizar las amplitudes que aparecen en la ecuación 6.30:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ A_2/A_1 \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

Ahora, como partimos añadiendo una solución del tipo $\mathbf{x}$=$\mathbf{A}\sin(\omega t)$, hay dos frecuencias y por tanto la solución general es la contribución de ambas frecuencias. Esto es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.4 \end{pmatrix} \sin(5.4t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4 \end{pmatrix} \sin(13.1t) \tag{6.36}$$

Note que, para ser más general, se puede agregar una fase ϕ dentro de las funciones trigonométricas, además de un par de constantes C_1 y C_2 que pesen estas funciones, las cuales habrían de ser determinadas con condiciones iniciales.

6.4. Oscilador forzado

El oscilador armónico forzado no amortiguado es un sistema físico que oscila bajo la influencia de una fuerza externa periódica, pero sin ninguna fuerza de disipación de energía, como la

fricción o la resistencia del aire. Este modelo idealizado es crucial para entender fenómenos como la resonancia.
La ecuación de movimiento (ecuación 6.11), por tanto, pasa a tener un término extra igual a este forzamiento que varía en el tiempo $F(t)$. Esto es:

$$\boxed{m\ddot{\eta} + k_0\eta = F(t)} \tag{6.37}$$

En casos muy frecuentes, la fuerza es sinusoidal (llamada excitación armónica), lo que implica que la ecuación se puede escribir como:

$$\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{6.38}$$

donde se ha dividido por la masa y usado la definición de ω_0 (ecuación 6.12).
Note que del desarrollo entre las ecuaciones 5.39 y 5.42, ahora la fuerza $\vec{F}$ se puede descomponer en las fuerzas internas y externas. Por lo tanto, $\vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}_{int}\cdot\vec{v} + \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v} = \frac{dU}{dt} + \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v} = \frac{dK}{dt}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(K+U) = \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v} \Longrightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v}} \tag{6.39}$$

Es decir, que la energía mecánica no es constante en el tiempo, sino que cambia en función de la potencia externa que es entregada al sistema.

Volviendo al caso de la ecuación 6.38, la solución general se divide en dos partes, una como si no existiera el forzamiento externo $\eta_h(t)$ y otra en la que el sistema reacciona con el forzamiento $\eta_p(t)$. La solución general para el caso sin forzamiento está dada por la ecuación 3.79:

$$\eta_h(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) \tag{6.40}$$

donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales, es decir, que dependen de $\eta(0)$ y $\dot{\eta}(0)$. Para el caso no homogéneo, se asume que la respuesta del sistema (desplazamiento) debe ser similar al forzamiento ya que la solución homogénea no genera el forzamiento $F(t)$ pues dependen de ω_0 y no de ω. Por lo tanto, es necesario plantear una solución del tipo $\eta_p(t) = C_0\cos(\omega t)$, donde C_0 es una constante a determinar. Al reemplazar esta solución no homogénea en la ecuación 6.38, tenemos

$$-\omega^2 C_0\cos(\omega t) + \omega_0^2 C_0\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \Longrightarrow C_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{6.41}$$

Luego, la solución general es:

$$\eta(t) = \eta_h(t) + \eta_p(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) \tag{6.42}$$

No obstante, esta ecuación diverge cuando la frecuencia del forzamiento ω se acerca a la frecuencia natural ω_0. En sistemas diferenciales, cuando el forzante tiene la misma frecuencia

que una solución homogénea, hay que multiplicar la solución homogénea por t para encontrar una solución particular independiente (este es el *método de los coeficientes indeterminados*). Con esto, usamos $\eta_p(t) = Kt\sin(\omega_0 t)$, donde al realizar el mismo procedimiento de reemplazar en la ecuación de movimiento, encontramos que $K = F_0/2m\omega_0$. Al sumar esta componente particular a la homogénea, tenemos el caso resonante para el desplazamiento:

$$\eta(t) = \eta_h(t) + \eta_p(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t) \tag{6.43}$$

Esta solución implica que el desplazamiento crece linealmente con el tiempo. Como la energía potencial elástica depende de x al cuadrado (ecuación 6.9), y este depende del tiempo (ecuación 6.43), tenemos que la energía aumenta con el cuadrado del tiempo: $E \sim t^2$. Dicho de otra manera, la amplitud crece sin límites. Esto explica por qué estructuras o sistemas mecánicos deben evitar excitaciones cercanas a su frecuencia natural.

Ejercicio resuelto
Sea una masa m=0.5 kg sujeta a un resorte de constante k=2 N/m. La masa es empujada por una fuerza externa armónica $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ con F_0=1 N. Las condiciones iniciales son velocidad y posición nulas en el tiempo inicial.
Calcular la solución de las ecuaciones de movimiento con y sin resonancia (ω=1 rad/s).

R: Primero debemos calcular la frecuencia de resonancia, o frecuencia natural dada por la ecuación 6.12. Esto es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} = \sqrt{\frac{2\ \ N/m}{0.5\ kg}} = 2\ \ \frac{\text{rad}}{s} \tag{6.44}$$

Reemplazando los valores en la ecuación de movimiento (ecuación 6.38):

$$\ddot{x} + 4x = 2\cos(\omega t) \tag{6.45}$$

Ahora, tanto las soluciones resonantes como las que no requieren de la solución homogénea (ecuación 6.40) están ajustadas a las condiciones iniciales.

$$x_h(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) \tag{6.46}$$

La parte forzante para el caso no resonante es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) = \frac{2}{4-1}\cos(t) = \frac{2}{3}\cos(t) \tag{6.47}$$

Luego, la solución general para el caso no resonante es:

$$x_{nr}(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) + \frac{2}{3}\cos(t) \tag{6.48}$$

Aquí es donde imponemos las condiciones iniciales y poder obtener los valores de A y B. El enunciado nos dice que la posición es cero para el tiempo cero. Esto es:

$$0 = B + \frac{2}{3} \Longrightarrow B = -\frac{2}{3} \tag{6.49}$$

Reemplazando en la ecuación 6.48:

$$x_{nr}(t) = A\sin(2t) + \frac{2}{3}(\cos(t) - \cos(2t)) \tag{6.50}$$

También nos indica el enunciado que la velocidad es cero para el mismo tiempo inicial. Esto significa que hay que derivar con respecto al tiempo e igualar a cero:

$$\dot{x}_{nr}(t) = 2A\cos(2t) + \frac{2}{3}(2\sin(2t) - \sin(t)) \Longrightarrow A = 0 \tag{6.51}$$

Con esto, la solución final para el caso no resonante es:

$$x_{nr}(t) = \frac{2}{3}(\cos(t) - \cos(2t)) \tag{6.52}$$

Para el caso resonante, el término no homogéneo es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2} t\sin(2t) \tag{6.53}$$

Con este forzamiento resonante debemos volver a calcular las constantes A y B, por lo que la solución general para el caso resonante es:

$$x_r(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) + \frac{1}{2} t\sin(2t) \tag{6.54}$$

Aquí aplican las mismas condiciones. Es decir, que para tiempo cero, la posición es cero, lo que implica que $B = 0$. Para la velocidad tenemos:

$$\dot{x}_r(t) = 2A\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + t\cos(2t) \tag{6.55}$$

Al igualar a cero para tiempo cero, el único factor que sobrevive es A, por lo que es igual a cero. Esto nos deja la solución general para el caso resonante igual al forzamiento:

$$x_r(t) = \frac{1}{2} t\sin(2t) \tag{6.56}$$

La solución señala que el desplazamiento aumenta en el tiempo para el caso resonante a medida que hay oscilaciones. No obstante, para un tiempo lo suficientemente grande, el término lineal domina el sistema, haciendo que las oscilaciones sean menos relevantes para describir el sistema.

6.5. Oscilador amortiguado

Un oscilador armónico amortiguado es un sistema físico que oscila bajo la influencia de una fuerza restauradora (como un resorte) y una fuerza de amortiguamiento (como la fricción o la resistencia del aire) que disipa energía. A diferencia de un oscilador ideal, en la vida real hay rozamiento que disipa energía, haciendo que la amplitud de un oscilador amortiguado disminuya con el tiempo hasta que el movimiento se detiene eventualmente.
En términos de energía, el cambio de energía mecánica se puede escribir como:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{amort} \cdot \vec{v} \tag{6.57}$$

como dicta la ecuación 6.39. Sin consideramos que la fuerza de amortiguamiento es la del roce viscoso $\vec{F} = -b\vec{v}$ (ecuación 4.20) en la ecuación 6.57, tenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(K+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}k\vec{r}^2\right) = m\vec{v}\cdot\vec{a} + k\vec{r}\cdot\vec{v} = -b\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{6.58}$$

Dividiendo por $\vec{v}$ y m para luego reescribir $a = \ddot{x}$ y $v = \dot{x}$, para una dimensión, tenemos:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{6.59}$$

donde $\gamma = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la frecuencia natural. Vemos que la solución para el caso puramente amortiguado (ecuación 4.23) es del tipo $x(t) = e^{rt}$. Reemplazando en la ecuación 6.59, tenemos que:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \tag{6.60}$$

Matemáticamente, existen tres casos para esa raíz cuadrada. Esto es, para el signo que tiene su argumento $\Delta_0 = \gamma^2 - \omega_0^2$. Estos casos son: Δ_0 es positivo, negativo y cuando es igual a cero.
En el caso en que Δ_0 es positivo, se puede dar el caso en el que r sea grande, lo que implica que el decaimiento exponencial sea severo. Esto implica que el término exponencial es dominante. Físicamente, esto significa que la fuerza de amortiguamiento es tan fuerte que el sistema no puede completar una oscilación. En lugar de ello, la masa regresa lentamente a la posición de equilibrio sin sobrepasarla, como una puerta pesada que se cierra muy lentamente. Es por esto que este caso se llama caso **sobreamortiguado**. Como no hay oscilaciones, la solución debe ser del tipo:

$$\boxed{x(t) = C_0 e^{rt}} \qquad \text{Caso sobreamortiguado} \tag{6.61}$$

donde C_0 es una constante. En el caso en que Δ_0 sea negativo, significa que la fuerza de amortiguamiento es relativamente débil. Por lo tanto, la solución de la ecuación es una oscilación que decae exponencialmente, como un columpio que se va deteniendo gradualmente.

Como no tiene tanta amortiguación, este caso se conoce como **subamortiguado**. Estas soluciones son del tipo:

$$\boxed{x(t) = [A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)]\, e^{-\gamma t}} \qquad \text{Caso subamortiguado} \tag{6.62}$$

donde A y B son constantes y $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. El último caso es cuando Δ_0 es igual a cero. Representa un sistema que regresa a su posición de equilibrio lo más rápido posible sin oscilar. No obstante, antes de volver a esa posición, el amortiguamiento crítico indica que la fuerza de amortiguación (que disipa energía) es lo suficientemente fuerte como para contrarrestar la inercia del sistema y la fuerza restauradora (del resorte). En esa posicion inicial, la solución es $x(0) = x_0$, Sin embargo, una pequeña perturbación hará que el sistema se desplace linealmente con el tiempo, como sucede con la cinemática. Esto es $x(t) = x_0 + vt$ (ecuación 2.8). Adicionalmente, como el sistema está en movimiento, se rompe el equilibrio de fuerzas, implicando que ahota afecta el amortiguamiento dado por el término exponencial. Como hay amortiguamiento, pero permite que inicialmente una masa se pueda mover, este caso se conoce como **amortiguamiento crítico**. Esto implica que la solucion general sea de la forma:

$$\boxed{x(t) = [x_0 + vt]\, e^{rt}} \qquad \text{Caso críticamente amortiguado} \tag{6.63}$$

Ejercicio resuelto
Tomemos una masa m=1 kg, una constante elástica k=100 N/m, y un amortiguador de constante b=30 kg/s. La masa se suelta desde x_0=0.1 m, con una velocidad inicial $\dot{x}(0)$=0.
1. Determina $x(t)$.

R: Para comenzar a solucionar este problema, debemos identificar el tipo de regimen que tiene el sistema. Para esto obtenemos el valor de Δ_0. El valor de γ es $\frac{b}{2m}$= (30 kg/s)/(2*1 kg)=15 s^-1. Por otro lado, ω_0 es $\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{(100\ \ N/m)/(1\ \ kg)}$= 10 s^2. Con esto obtenemos el valor del argumento, el cual es $\Delta_0 = \gamma^2 - \omega_0^2 = 15^2 - 10^2\ \ s^{-2}$=125 s^{-2}. Es decir que es positivo, lo que implica que nos encontramos en el regimen **sobreamortiguado**.
Antes de usar la solución dada por la ecuación 6.61, debemos calcular en número de raíces que tiene dicha solución. Esto es, calcular r de la ecuación 6.60. Esto es:

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\Delta_0} \approx (-15 \pm 11.2)\ \ Hz \rightarrow r_1 \approx -26.2\ Hz, \quad r_2 \approx -3.8\ Hz \tag{6.64}$$

Con esto, la ecuación para la solución sobreamortiguada se transforma en:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{6.65}$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales. Para tiempo igual a cero, tenemos que $x(0)$ =0.1 m, lo que implica que $0.1 = C_1 + C_2$. Para el caso de la velocidad inicial, tenemos que $0 = C_1 r_1 + C_2 r_2$. Resolviendo este sistema, tenemos que C_1 ≈0.017 m y C_2 ≈0.083. Luego, la solución general para este ejercicio es:

$$x(t) \approx 0.017e^{-26.2t} + 0.083e^{-3.8t} \;\; m \tag{6.66}$$

2. Encuentre un b con el que ahora el sistema se vuelve **críticamente amortiguado**. Encuentre la solución para este caso.

R: Para esta condición, necesitamos que Δ_0 sea igual a cero. Esto es lo mismo que decir que $\gamma = \omega_0$, l oque es equivalente a $\frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow b = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{(100 \;\; N/m)(1 \;\; kg)} = 20 \;\; kg/s$. Ahora, como $r = -\gamma = -15 \;\; Hz$, no hay más raíces, por lo que se puede usar directamente la ecuación 6.63:

$$x(t) = [x_0 + vt]\, e^{-10t} \tag{6.67}$$

Usando las condiciones iniciales, es claro que para t=0 s tenemos que $x(0) = x_0$ =0.1 m. Para la velocidad, tenemos que derivar e igualar a cero. Esto es:

$$0 = [v_0]\, e^{-10*0} - 10\,[x_0 + v_0 * 0]\, e^{-10*0} \Longrightarrow v_0 = 10x_0 = 1 \;\; Hz \tag{6.68}$$

Con esto, la ecuación general se transforma en:

$$x(t) = [0.1 + t]\, e^{-10t} \;\; m \tag{6.69}$$

3. Considere que ahora b=10 kg/s. Encontrar la ecuación de movimiento.

R: Para este caso, el valor de Δ_0 es $5^2 - 10^2 \; s^{-2} = -\; 75 \; s^{-2}$, el cual es un valor negativo. Por tanto nos encontramos en el caso **subamortiguado**, lo que nos permite usar la ecuación 6.62 junto a la frecuencia $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} \; s^{-1} \approx 8.7 \; Hz$. Reemplazando en la ecuación 6.62:

$$x(t) \approx [A\cos(8.7t) + B\sin(8.7t)]\, e^{-5t} \tag{6.70}$$

Para este caso, volvemos a aplicar las condiciones iniciales. Para tiempo cero, nos queda que $A = x_0 = 0.1 \; m$. Para la condición de la velocidad, tenemos:

$$\dot{x}(t) = -5\,[A\cos(8.7t) + B\sin(8.7t)]\, e^{-5t} + 8.7\,[-A\sin(8.7t) + B\cos(8.7t)]\, e^{-5t} \tag{6.71}$$

Igualando a cero para tiempo cero:

$$0 = -5A + 8.7B \rightarrow B = \frac{5}{8.7}A \approx 0.057 \; m \tag{6.72}$$

Finalmente, la solución general es:

$$x(t) \approx [0.1\cos(8.7t) + 0.057\sin(8.7t)]\, e^{-5t} \;\; m \tag{6.73}$$

6.6. Oscilador forzado y amortiguado

Este es un modelo físico que describe un sistema que oscila bajo la influencia de tres fuerzas: una fuerza restauradora (como la de un resorte), una fuerza de amortiguamiento (como la fricción) y una fuerza impulsora externa periódica. Este modelo es uno de los más importantes en la física y la ingeniería porque describe con precisión una gran cantidad de fenómenos reales.
En términos matemáticos, representa a la suma de todas las fuerzas que hemos analizado para oscilaciones:

$$\sum \vec{F} = -k\vec{x} - b\vec{\dot{x}} + \vec{F}_0 \cos(\omega t) = m\vec{\ddot{x}} \tag{6.74}$$

O en su forma normalizada a lo largo de una dirección:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \tag{6.75}$$

De la misma forma en la cual calculamos la solución para un oscilador forzado (ecuación 6.37), la solución para esta ecuación de movimiento se separa en la parte homogénea (que corresponde a los tres casos de amortiguamiento dada por las ecuaciones 6.61, 6.62 y 6.63 dependiendo del caso) más la parte de forzamiento (como muestra el último término de la derecha en la ecuación 6.42). Aquí es importante notar que la solución particular es diferente (y notoriamente más complicada) a la mostrada en la ecuación 6.42. Para esto, repetimos el procedimiento, pero planteando una solución ligeramente más general como:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t + \phi) \tag{6.76}$$

Aquí ϕ representa un desfase que puede ocurrir cuando el forzamiento se amortigua en el sistema, desviando la oscilación externa de la obtenida por el sistema. Las derivadas de esta solución propuesta son $\dot{x}_p(t) = -\omega X\sin(\omega t + \phi)$ y $\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 X\cos(\omega t + \phi)$. Al reemplazar en la ecuación 6.75 tenemos:

$$-\omega^2 X\cos(\omega t + \phi) - 2\gamma\omega X\sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 X\cos(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{6.77}$$

Reagrupando los términos:

$$X\left((\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \phi) - 2\gamma\omega\sin(\omega t + \phi)\right) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{6.78}$$

De esta ecuación notamos que debemos separar la fase ϕ de los argumentos trigonométricos. Para esto usamos las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos(\omega t + \phi) &= \cos(\phi)\cos(\omega t) - \sin(\phi)\sin(\omega t),\\ \sin(\omega t + \phi) &= \sin(\phi)\cos(\omega t) + \cos(\phi)\sin(\omega t)\end{aligned} \tag{6.79}$$

Sustituyendo en la ecuación 6.78, tenemos:

$$X\left((\omega_0^2-\omega^2)(\cos(\phi)\cos(\omega t)-\sin(\phi)\sin(\omega t))-2\gamma\omega(\sin(\phi)\cos(\omega t)+\cos(\phi)\sin(\omega t))\right)= \\ =\frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{6.80}$$

Aquí reagrupamos los términos con $\cos(\omega t)$ y los términos con $\sin(\omega t)$:

$$X\left(\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\phi)-2\gamma\omega\sin(\phi)\right]\cos(\omega t)-\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\phi)+2\gamma\omega\cos(\phi)\right]\sin(\omega t)\right)= \\ =\frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{6.81}$$

Esto nos permite separar la ecuación en dos: aqulla parte que es igual al forzamiento (la parte que tiene $\cos(\omega t)$) y aquella parte que es igual a cero ya que el forzamiento no tiene una componente igual a $\sin(\omega t)$. Esto es:

$$\begin{aligned} X\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\phi)-2\gamma\omega\sin(\phi)\right]&=\frac{F_0}{m},\\ X\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\phi)+2\gamma\omega\cos(\phi)\right]&=0 \end{aligned} \tag{6.82}$$

De la segunda ecuación tenemos que:

$$\boxed{\tan(\phi)=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}} \tag{6.83}$$

Con esto hemos encontrado la fase al aplicar el arctan. Para encontrar el valor de X, hacemos un cambio de variable, donde ahora $A=(\omega_0^2-\omega^2)$ y $B=2\gamma\omega$. Con este cambio, las ecuaciones 6.82 se transforman en:

$$\begin{aligned} X\left[A\cos(\phi)-B\sin(\phi)\right]&=\frac{F_0}{m},\\ X\left[A\sin(\phi)+B\cos(\phi)\right]&=0 \end{aligned} \tag{6.84}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} X^2\left[A^2\cos^2(\phi)+B^2\sin^2(\phi)-2AB\cos(\phi)\sin(\phi)\right]&=\frac{F_0^2}{m^2},\\ X^2\left[A^2\sin^2(\phi)+B^2\cos^2(\phi)+2AB\cos(\phi)\sin(\phi)\right]&=0 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Sumando ambas ecuaciones nos queda:

$$\begin{aligned} X^2\left[A^2(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))+B^2(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi))\right]&=\frac{F_0^2}{m^2}\\ \implies X^2\left[A^2+B^2\right]&=\frac{F_0^2}{m^2}\\ \implies X&=\frac{F_0}{m\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned} \tag{6.86}$$

Reemplazando los valores de A y B recuperamos la amplitud de la solución particular como:

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi)} \tag{6.87}$$

Aquí es importante destacar que, a diferencia del caso sin amortiguamiento donde había que considerar el caso en el que había una solución diferente para cuando la frecuencia forzante se acerca a la frecuencia natural, la ecuación 6.87 no presenta problemas para el caso $\omega = \omega_0$. Esto indica que la presencia de una amortiguación (disipación de energía) evita que el sistema se indetermine.

Ejercicio resuelto
Considere el caso en el que un sistema masa resorte tiene una masa de 0.5 kg, una constante elástica k=200 N/m, pero se encuentra con un amortiguamiento b =10 Ns/m. Adicionalmente, este sistema tiene un forzamiento de aplitud F_0= 5 N que tiene una frecuencia armónica ω=18 rad/s.
1. Encontrar la amplitud $X(\omega)$ de la solución particular estacionaria.

R: En primer lugar, debemos definir lo que significa solución 'estacionaria'. Esta hace referencia al movimiento permanente que persiste cuando los movimientos transitorios ya se han disipado por el amortiguamiento. Esta es la oscilación forzada, con la misma frecuencia que la excitación, amplitud $X(\omega)$ y desfase ϕ respecto a la fuerza aplicada. Es decir, la solución es $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \approx x_p(t)$. Esta solución está dada por la ecuación 6.87. No obstante, debemos encontrar los valores de ω_0^2 y γ^2. Estos son $\omega_0^2 = k/m$ =200/0.5 $1/s^2$=400 $1/s^2$ y $\gamma^2 = [b/(2m)]^2 = 100\ 1/s^2$. Reemplazando en la ecuación 6.87, tenemos:

$$\begin{aligned} X(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \rightarrow X(18\ \ rad/s) &= \frac{5\ \ N}{0.5\ kg\sqrt{(400-320)^2 + 4(100)(320)\ \ 1/s^4}} \\ &= \frac{10\ \ N/kg}{\sqrt{(6400 + 128000\ \ 1/s^4)}} \approx \frac{10\ \ N/kg}{367\ \ 1/s^2} \\ \Longrightarrow X(18\ \ rad/s) &\approx 0.03\ m \end{aligned} \tag{6.88}$$

Es decir, que la amplitud de este sistema es de aproximadamente 3 cm.

2. Calcula el desfase ϕ.

R: Este se obtiene a partir de la ecuación 6.83, por lo tanto, reemplazando los valores de γ, ω y ω_0:

$$\tan(\phi) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{2(10\ \ 1/s)(18\ \ rad/s)}{320 - 400\ \ 1/s^2} \approx -4.5\ rad \Longrightarrow \phi \approx 1.35\ rad \approx -77^\circ \tag{6.89}$$

Esto quiere decir que la masa oscilará con una amplitud X, pero esa oscilación estará retrasada unos 77° con respecto al forzamiento inicial.

Capítulo 7

Fuerzas centrales y planetas

Como vimos en la Sección 3.5, una fuerza central es aquella que siempre apunta hacia un punto fijo, llamado el centro de fuerza, y su magnitud solo depende de la distancia al mismo. La fuerza gravitacional (ecuación 4.1) es el ejemplo más importante de una fuerza central, y es la razón por la cual los planetas orbitan el Sol.

7.1. Barrera centrífuga

La barrera centrífuga es una 'barrera' de energía potencial que impide que un objeto se acerque indefinidamente al centro de la fuerza. No es una barrera física, sino una región de energía prohibida para la partícula. En el análisis del movimiento de un planeta en órbita, es crucial considerar la energía potencial efectiva (ecuación 5.48). La cual es $V_{ef} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$. El primer término es siempre positivo y actúa como una 'barrera' que se vuelve infinita a medida que r se acerca a cero. Esto se debe a que un objeto con momento angular no nulo no puede colisionar con el centro de la fuerza. Ahora, sabemos que las fuerzas conservativas se pueden escribir como $F_{cons} = -dV/dr$ (ecuación 5.37). Aplicando esto al término centrífugo tenemos:

$$F_{cf} = -\frac{dV_{cf}}{dr} = -\frac{d}{dr}\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{mr^3} \tag{7.1}$$

donde m es la masa del planeta orbitando. Note que esta fuerza es positiva, lo cual indica que apunta hacia afuera, confirmando que es una fuerza que actúa intentando alejar a un planeta en órbita. Ahora, de la ecuación 3.57 sabemos que el momento angular se puede escribir como proporcional a la velocidad angular ($\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$). Reemplazando en la ecuación 7.1, tenemos que

$$F_{cf} = \frac{(mr^2\vec{\omega})^2}{mr^3} = mr\omega^2 \tag{7.2}$$

Note que el término $r\omega^2$ es la aceleración centrípeta dada por la ecuación 2.109. Esto significa que la fuerza centrífuga es proporcional a la aceleración centrípeta, pero con dirección positiva (hacia afuera de la órbita):

$$F_{cf} = ma_c \tag{7.3}$$

Ejercicio resuelto
Un objeto de masa m=1000 kg se mueve a distancia r=1.5×10^7 m del Sol con momento angular $L = 3 \times 10^{15}\ kgm^2/s$. Calcula la fuerza centrífuga.

R: Para este sistema solo basta con agregar los valores a la ecuación 7.1:

$$F_{cf} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{(3 \times 10^{15})^2\ \ kg^2m^4/s^2}{(1000)(1.5 \times 10^7)^3\ \ kgm^3} \approx 2.6 \times 10^6\ \ N \tag{7.4}$$

7.2. La ecuación de Binet

La ecuación de Binet es una reformulación de la Segunda ley de Newton para fuerzas centrales, expresada en términos de la variable $u = \frac{1}{r}$. Esta parte toma la segunda ley de Newton para una aceleración en coordenadas polares, lo que queda:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{7.5}$$

Aquí recordamos la regla de la cadena:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{1}{\dot{\theta}} = -r^{-2}\dot{r}\frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{L_0} \tag{7.6}$$

donde hemos recordado la definición de u con r y recordamos que para un movimiento circular, el momento angular es constante y vale $L = mr^2\dot{\theta}$ (ecuación 3.95). En este caso $L_0 = L/m = r^2\dot{\theta}$, donde la masa también es constante, lo que no afecta a la dinámica del ejercicio. Luego, al aplicar la segunda derivada con respecto al ángulo, tenemos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{L_0}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{1}{L_0}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{L_0}\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} \tag{7.7}$$

Como $L_0 = r^2\dot{\theta} = u^{-2}\dot{\theta}$, implica que $\dot{\theta} = u^2L_0$. Reemplazando, tenemos las dos ecuaciones:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{L_0}, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\ddot{r}}{L_0^2u^2} \tag{7.8}$$

Reemplazando en la ecuación 7.5 y aprovechando que $\dot{\theta}^2 = u^4L_0^2$ y por tanto $r\dot{\theta}^2 = u^{-1}u^4L_0^2$:

$$F_r = m\left(-L_0^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - u^3L_0^2\right) = -mL_0^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \frac{u^2L^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \tag{7.9}$$

Con esto, la ecuación de Binet finalmente es:

$$\boxed{\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{mF_r}{u^2L^2}} \tag{7.10}$$

En el caso de la Fuerza de gravedad: $F = -G\frac{Mm}{r^2}$ (ecuación 4.1), el término de la derecha nos queda $-\frac{mF_r}{u^2L^2} = \frac{m}{u^2L^2}G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm^2}{L^2}$, lo que es igual a:

$$\boxed{\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = G\frac{Mm^2}{L^2}} \tag{7.11}$$

De esta forma, la ecuación de Binet nos da una ecuación diferencial simple ya que el término de la derecha es constante.

Ejercicio resuelto
1. Resuelve la ecuación diferencial y obtén $r(\theta)$.

R: Para resolver este tipo de ecuaciones, recurrimos a las técnicas de la resolución de ecuaciones diferenciales. Partimos suponiendo que la solución se puede descomponer en una parte homogénea (solución suponiendo que el lado derecho de la ecuación 7.11 es cero) y otra solución particular (proporcional al término de la derecha en la ecuación 7.11). Esto es $u = u_h + u_p$. Para el caso homogéneo, la solución general de una ecuación del tipo $u'' = -u$ corresponde a funciones sinusoidales:

$$u_h = A\cos(\theta) + B\sin(\theta) \tag{7.12}$$

En algunas ocasiones se usa otra forma de esta solución, que es una versión más compacta. Para esto se usa la primera identidad trigonométrica ilustrada en la ecuación 6.79. Esta es: $\cos(\theta+\phi) = \cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)$. Para el caso en que es una resta de ángulos, tenemos: $\cos(\theta - \phi) = \cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta)$, lo que nos permite escribir la solución homogénea como:

$$u_h = C\cos(\theta - \phi) \tag{7.13}$$

con $A = \cos(\phi)$, $B = \sin(\phi)$, C una constante tal que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\phi = \arctan(\frac{B}{A})$. Luego, sin condiciones extras, la solución general es:

$$u(\theta) = A\cos(\theta) + B\sin(\theta) + G\frac{Mm^2}{L^2} = C\cos(\theta - \phi) + G\frac{Mm^2}{L^2} \tag{7.14}$$

Usando la definición de u, tenemos que:

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos(\theta) + B\sin(\theta) + G\frac{Mm^2}{L^2}} = \frac{1}{C\cos(\theta - \phi) + G\frac{Mm^2}{L^2}} \tag{7.15}$$

7.3. La ecuación de la órbita

La ecuación de la órbita es una fórmula que describe la trayectoria geométrica de un objeto en el espacio cuando se mueve bajo la influencia de una fuerza central, como la gravedad. En lugar de decirnos dónde está el objeto en un momento dado, nos dice la forma de su

camino, relacionando su distancia al centro de la fuerza (r) con el ángulo polar (θ). Las únicas trayectorias posibles bajo una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia son las cónicas, que incluyen círculos, elipses, parábolas e hipérbolas.
Matemáticamente, la órbita queda determinada por la solución general de la ecuación de Binet (ecuación 7.15), pero aún más simplificada. Esto es:

$$r(\theta) = \frac{1}{G\frac{Mm^2}{L^2}\left(1 + \frac{CL^2}{GMm^2}\cos\left(\theta - \phi\right)\right)} \Longrightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)}} \tag{7.16}$$

donde $p = L^2/GMm^2$ y $\epsilon = CL^2/GMm^2$. Un esquema de esta ecuación se muestra en la Figura 7.1 Aquí, p corresponde al *semilatus rectum* que representa la distancia desde el foco hasta la curva en una línea perpendicular al eje principal y ϵ a la excentricidad la cual describe cuánto se desvía una forma cónica (como una elipse, parábola o hipérbola) de una circunferencia. Para encontrar la relación entre la excentricidad y la energía total, debemos tomar la ecuación 5.47 junto al potencial gravitatorio de la ecuación 5.54:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \tag{7.17}$$

donde $k = GMm$. Por otro lado, la excentricidad se define como:

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \tag{7.18}$$

donde se indica cuánto se desvía la órbita de una circunferencia. De hecho, para la circunferencia, tenemos que la excentricidad es cero. Los valores mínimos y máximos tienen la condición de $\dot{r} = 0$. Esto debido a que, en esos puntos, el objeto deja de acercarse o alejarse del centro de fuerza y cambia de dirección. Para entender esto de mejor manera, hay que tener en cuenta que el r_{max} hace referencia al *afelio* y que corresponde a un planeta que está en su punto más lejano. En este punto su velocidad se vuelve puramente tangencial pues ha dejado de alejarse del Sol (no puede alejarse más) y está a punto de empezar a acercarse. Por otro lado, r_{min} corresponde al *perihelio*, que ocurre cuando el planeta está en su punto más cercano al Sol. En ese instante, su velocidad es puramente tangencial a la órbita ya que el planeta ha dejado de acercarse al Sol y está a punto de comenzar a alejarse, lo que significa que su componente de velocidad radial también es cero. Esta condición hace que la ecuación 7.17 sea:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = 0 \Longrightarrow Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} = 0 \tag{7.19}$$

La solución para esta ecuación es:

$$\begin{aligned} r =& \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} \\ \Longrightarrow r_{max} =& \frac{-k - \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E}, \qquad r_{min} = \frac{-k + \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Con esto, el numerador es:

$$r_{max} - r_{min} = \frac{-k - \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} - \frac{-k + \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} = -\frac{\sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{E} \tag{7.21}$$

Para el denominador:

$$r_{max} + r_{min} = \frac{-k - \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} + \frac{-k + \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{2E} = -\frac{k}{E} \tag{7.22}$$

Ahora, dividiendo el numerador por el denominador, tenemos:

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{-\frac{\sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}}}{E}}{-\frac{k}{E}} = \frac{k\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{k^2m}}}{k} \Longrightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{k^2m}}} \tag{7.23}$$

Esta ecuación conecta la geometría de la órbita (excentricidad) con la dinámica (energía y momento angular).

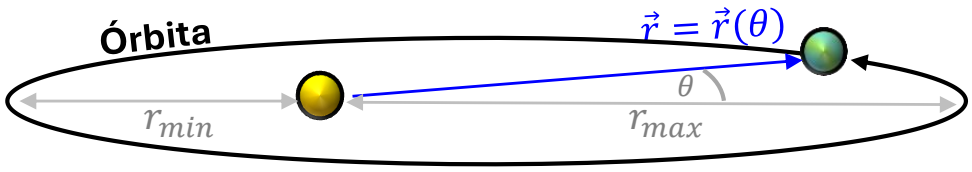


Figura 7.1: Ilustración de los parámetros más relevantes para la ecuación de la órbita (ecuación 7.16)

7.3.1. Cónicas

Matemáticamente, la excentricidad dibuja diferentes órbitas, lo cual se manifiesta en los valores de ϵ. Por ejemplo, una **circunferencia** se alcanza cuando $\epsilon = 0$. Esto automáticamente implica que la energía es $E = -\frac{k^2m}{2L^2}$. Este es el valor mínimo de la energía. Esto se puede demostrar considerando la derivada radial de la ecuación 7.17:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Longrightarrow r_0 = \frac{L^2}{mk} \tag{7.24}$$

Este radio es el único radio para el cual el sistema está en equilibrio, y corresponde al radio de una órbita circular. Ahora, volviendo a derivar, tenemos:

$$\left.\frac{d^2E}{dr^2}\right|_{r_0} = 3\frac{L^2}{mr_0^4} - 2\frac{k}{r_0^3} = 3\frac{L^2}{m(\frac{L^2}{mk})^4} - 2\frac{k}{(\frac{L^2}{mk})^3} = \frac{m^3k^4}{L^6} > 0 \tag{7.25}$$

Esto significa que este radio describe un mínimo local. Ahora, reemplazando este radio r_0 en ecuación 7.19, nos queda:

$$E_{min} = \frac{L^2}{2m(\frac{L^2}{mk})^2} - \frac{k}{\frac{L^2}{mk}} = \frac{mk^2}{2L^2} - \frac{mk^2}{L^2} = -\frac{mk^2}{2L^2} \tag{7.26}$$

Lo cual es exactamente el valor de energía que se obtiene al considerar la energía para una circunferencia.

Órbita elíptica

Una órbita elíptica es la trayectoria cerrada de un objeto que se mueve bajo la influencia de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como la fuerza de la gravedad. Es la forma de órbita más común para planetas, satélites y cometas periódicos. A diferencia de un círculo perfecto, una elipse es un 'círculo estirado', donde la distancia al centro de la órbita no es constante. Físicamente, esta cónica se alcanza cuando el cuerpo no tiene suficiente energía para escapar. Es decir, que la energía cinética no es suficiente para superar al potencial gravitatorio efectivo, por lo tanto, la energía es negativa: $E < 0$. Esto implica que el término $\frac{2L^2E}{k^2m}$ (ecuación 7.23) es negativo. Esto hace que la excentricidad sea menor a 1 ($\epsilon < 1$).

Ejercicio resuelto
Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia más cercana al Sol (perihelio) es 8×10^{10} m, y su distancia más lejana (afelio) es 1×10^{12} m.
1. Encuentre la excentricidad de la órbita.

R: Para encontrar la excentricidad, usamos directamente la ecuación 7.18 con $r_{max} - r_{min} = 1 \times 10^{12} - 8 \times 10^{10}$ m =9.2 $\times 10^{11}$ m y $r_{max} + r_{min} = 1 \times 10^{12} + 8 \times 10^{10}$ m =1.08 $\times 10^{12}$ m:

$$\epsilon = \frac{9.2 \times 10^{11} \ m}{1.08 \times 10^{12} \ m} \approx 0.85 \tag{7.27}$$

2. Calcular el semieje mayor.

R: El eje mayor es la suma del perihelio r_{min} y el afelio r_{max}, y el semieje mayor a es la mitad de esa suma. Esto es:

$$2a = r_{min} + r_{max} \rightarrow a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{1.08 \times 10^{12} \ m}{2} \approx 5.4 \times 10^{11} \ m \tag{7.28}$$

Órbita parabólica

Una órbita parabólica es la trayectoria que sigue un objeto cuando tiene la velocidad exacta para escapar del campo gravitacional de un cuerpo central. A diferencia de las órbitas elípticas, que son cerradas, un objeto en una órbita parabólica se aleja del cuerpo central para nunca regresar.
Físicamente, esta es una condición de $E = 0$, lo que significa que tiene una energía cinética exactamente suficiente para poder sobrepasar la energía potencial y poder escapar. Como E es cero, tenemos que (por medio de la ecuación 7.23), la excentricidad es igual a 1 ($\epsilon = 1$).
Ahora podemos calcular la velocidad de escape (velocidad total que incluye el término centrífugo, pues ya no hablamos de trayectorias cerradas) usando la ecuación 5.46, para un potencial gravitatorio $-GMm/r$ (ecuación 5.54)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \Longrightarrow \boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}} \tag{7.29}$$

Esta es la velocidad mínima que un objeto necesita para escapar de la atracción gravitatoria de un cuerpo, sin importar en qué dirección se lance o la masa del objeto.

Ejercicio resuelto
Calcule la Velocidad de Escape de la Tierra. Considere que la masa de la Tierra es 5.97×10^{24} kg), el radio de la Tierra es 6.37×10^{6} m y la constante de gravitación universal es 6.67×10^{-11} Nm^2/kg^2.

R: Aquí solo tenemos que reemplazar los valores de la tierra en la ecuación 7.29

$$\begin{aligned} v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} &= \sqrt{\frac{2(6.67\times10^{-11}\ \ Nm^2/kg^2)(5.97\times10^{24}\ \ kg)}{6.37\times10^{6}\ \ m}} \\ \Longrightarrow v_{esc} &\approx 11181\ \frac{m}{s} \approx 11.2\ \frac{km}{s} \approx 40300\ \frac{km}{h} \end{aligned} \tag{7.30}$$

Órbita hiperbólica

Una órbita hiperbólica es la trayectoria que sigue un objeto que se mueve bajo la influencia de una fuerza central, como la gravedad, con suficiente energía para escapar del campo de fuerza y nunca regresar. La característica definitoria de una órbita hiperbólica es que la energía total del sistema (E) es positiva ($E > 0$). Esto significa que la energía cinética del objeto es mayor que la energía potencial gravitatoria en cualquier punto. En otras palabras, el objeto tiene más que la velocidad de escape necesaria. Esto significa que la excentricidad es mayor que 1. ($\epsilon > 1$).
Alguno de los ejemplos de este tipo de trayectoria son las sondas espaciales que se dirigen a otros planetas, como la sonda Voyager o la New Horizons. Estas se lanzan a una velocidad mayor que la velocidad de escape de la Tierra para que puedan seguir una trayectoria hiperbólica y alejarse de la gravedad terrestre. También, algunos cometas que se originan fuera

del Sistema Solar tienen trayectorias hiperbólicas, ya que después de pasar cerca del Sol, se alejan para siempre.

Ejercicio resuelto
Una sonda de 800 kg se lanza desde una órbita circular baja de 6500 km de radio alrededor de la Tierra (M=5.97×10^{24} kg) con una velocidad de 12.0 km/s. Determine si la órbita de la sonda es hiperbólica.

R: Primero, debemos identificar las cantidades y la fórmula de la energía total. La energía total de la sonda se calcula como la suma de la energía cinética y la potencial (lado izquierdo de la ecuación 7.29):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}(800)(12000)^2 - (6.67 \times 10^{-11})\frac{(5.97 \times 10^{24})(800)}{6500000} \quad J \approx 8.6 \times 10^9 \quad J \tag{7.31}$$

Como la energía total es positiva ($E > 0$), la órbita de la sonda es hiperbólica. Por lo tanto, la sonda escapará de la órbita terrestre y no regresará.

7.4. La ecuación de Verlet

La integración numérica es un método para resolver ecuaciones de movimiento cuando no existe una solución analítica o esta es demasiado compleja de obtener. Se utiliza para simular el movimiento de un sistema, como una nave espacial o un planeta, al calcular su posición y velocidad en pequeños pasos de tiempo. El algoritmo de Verlet es un método de integración numérica popular por su precisión y estabilidad, especialmente en la simulación de sistemas conservativos, como los que se rigen por las fuerzas centrales.
El análisis de las cónicas (elipse, parábola, hipérbola) nos da la solución exacta para el movimiento bajo una fuerza de la forma $F \propto 1/r^2$. Sin embargo, en la vida real, los sistemas a menudo tienen fuerzas adicionales (como la resistencia del aire, la presión de radiación solar o la influencia de otros planetas) que desvían la trayectoria de la cónica perfecta. En estos casos, la integración numérica se convierte en una herramienta indispensable para modelar con precisión el movimiento.
Para encontrar la fórmula, aplicamos la expansión en serie de Taylor ($f(t+\Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(\Delta t)^n$) a la posición de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t+\Delta t) &= \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\vec{r}^{(3)}(t)\Delta t^3 + ... \\ \vec{r}(t-\Delta t) &= \vec{r}(t) - \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2 - \frac{1}{6}\vec{r}^{(3)}(t)\Delta t^3 + ... \end{aligned} \tag{7.32}$$

Al sumar ambas, tenemos:

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) = 2\vec{r}(t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 + ... \tag{7.33}$$

Al restar por el doble de la posición y dividir por el tiempo, tenemos una expresión para la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) - 2\vec{r}(t)}{\Delta t^2} \tag{7.34}$$

Usando la segunda ley de Newton (suma de fuerzas igual a $m\vec{a}$ de la ecuación 3.14) junto a la definición de una fuerza conservativa (5.37)

$$\vec{r}(t+\Delta t) + \vec{r}(t-\Delta t) - 2\vec{r}(t) = \frac{\Delta t^2}{m}\vec{F}_{cons} = -\frac{\Delta t^2}{m}\vec{\nabla}U(t) \tag{7.35}$$

Ahora, despejando la posición en un instante posterior $(t+\Delta t)$, nos queda:

$$\boxed{\vec{r}(t+\Delta t) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t-\Delta t) - \frac{\Delta t^2}{m}\vec{\nabla}U(t)} \tag{7.36}$$

Esta es la ecuación de Verlet. No obstante, podemos ocuparla para poder obtener la posición en función siguiente en función de las posiciones pasadas. Para esto, consideremos que esta es la posición radial y que el potencial es un potencial de una fuerza central:

$$\boxed{r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1} - \frac{\Delta t^2}{m}\frac{dU_n}{dr}} \tag{7.37}$$

Esta es una ecuación que se puede iterar, aunque necesitamos dos condiciones iniciales. Esto es $r_0 = r(0)$ y $v_0 = v(0)$, pues con esto podemos usar nuestra ecuación obtenida en 4.30 para la posición:

$$r_1 = r(0) + v(0)\Delta t + \frac{1}{2}a(0)\Delta t^2, \qquad v_1 = v(0) + (a(0) + a_1)\Delta t \tag{7.38}$$

Ejercicio resuelto
Sea un sistema de masa central M=1, partícula m=1, Δt=1 y G=1 (unidades adimensionales), donde se tiene la condición inicial para órbita circular: $\vec{r}_0$ =(1,0) y $\vec{v}_0$ =(0,1). Comprobación si la energía (antes y después del paso) se conserva.

R: Para calcular la posición en 1, usamos la ecuación 7.38. Sin embargo, no tenemos la aceleración, por lo que la calculamos usando el término derecho en la ecuación 7.35:

$$\vec{a}_0 = -\frac{1}{m}\vec{\nabla}U = -\frac{1}{m}\frac{GMm}{r_0^3}\vec{r}_0 \tag{7.39}$$

donde hemos usado la fuerza gravitatoria (ecuación 4.1) y $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$. El módulo de la velocidad es 1, por lo que, reemplazando los valores, tenemos:

$$\vec{a}_0 = -\frac{1}{m}\frac{GMm}{r_0^3}\vec{r}_0 = -\frac{1}{1}\frac{(1)(1)(1)}{(1)^3}(1,0) = -(1,0) \tag{7.40}$$

Ahora podemos calcular la posición en $\vec{r}_1$ la ecuación 7.38:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(0)\Delta t^2 = (1,0) + (0,1)(0.1) + \frac{1}{2}(-1,0)(0.1)^2 = (0.999, 0.1) \quad (7.41)$$

donde el módulo es: $r_1 = \sqrt{0.999^2 + 0.1^2}$ ≈1.005. Ahora, si queremos calcular la siguiente posición, debemos volver a calcular la aceleración y velocidad para el punto siguiente. Esto es, tomar la aceleración nueva (actualizar la ecuación 7.40):

$$\vec{a}_1 = -\frac{1}{m}\frac{GMm}{r_1^3}\vec{r}_0 = -\frac{1}{1}\frac{(1)(1)(1)}{(1.005)^3}(0.999, 0.1) \approx -(0.984, 0.099) \quad (7.42)$$

Ahora debemos encontrar la velocidad actualizada, lo cual se muestra en la ecuación 7.38 (a la derecha):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(0) + [\vec{a}(0) + \vec{a}_1]\Delta t = (0,1) + [(-1,0) + (-0.984, -0.099)](0.1) \approx (-0.198, 0.99) \quad (7.43)$$

Para saber si la energía se conserva, tomamos la ecuación 7.29 ($E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$) para ambas posiciones 0 y 1. Para la posición inicial, tenemos:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{r_0} = \frac{1}{2}(1)(1)^2 - (1)\frac{(1)(1)}{1} = -0.5 \quad (7.44)$$

Actualizamos para la posición 1:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}(1)(0.198^2 + 0.198^2) - (1)\frac{(1)(1)}{1.005} = \frac{1}{2}(1)(1.02) - 0.99 = -0.48 \approx E_0 \quad (7.45)$$

Estos resultados muestran que la energía se conserva con un error pequeño en un solo paso: esto ilustra la buena conservación energética de Verlet. Note que si no hubiéramos hecho aproximaciones numéricas en los pasos previos, el error sería incluso menor.

7.5. La misteriosa materia oscura

Cuando consideramos el radio de una órbita circular (ecuación 7.24), podemos calcular la energía que existe para tal caso, la cual es la energía mínima (ecuación 7.26):

$$E = E_{min} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = -\frac{mk^2}{2L^2} \quad (7.46)$$

de la ecuación 7.24, sabemos que el radio circular es $r_0 = \frac{L^2}{mk}$, por lo que al reemplazar, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = -\frac{mk^2}{2L^2} = -\frac{k}{2r} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2r} \Longrightarrow \boxed{v_{circ}^2 = \frac{GM}{r_{circ}}} \quad (7.47)$$

Esta es una ley del orden $v^2 \propto r^{-1}$ para órbitas circulares. Esta relación funciona perfectamente para sistemas como el Sol y sus planetas, donde la mayoría de la masa está concentrada en el centro. En este caso, la velocidad orbital de los planetas disminuye a medida que aumenta la distancia al Sol, porque la masa no aumenta significativamente. Sin embargo, cuando los astrónomos midieron la velocidad de rotación de las estrellas en el borde de las galaxias, esperaban ver una disminución similar. Sorprendentemente, encontraron que la velocidad de las estrellas se mantenía casi constante a grandes distancias del centro de la galaxia.
Este comportamiento anómalo sugiere que la cantidad de masa dentro de la órbita de las estrellas no se detiene en el borde de la materia visible, sino que continúa aumentando. Para explicar las velocidades de rotación observadas, debe existir una gran cantidad de masa adicional que no podemos ver: la **materia oscura**.

La velocidad medida de las estrellas lejanas es casi constante. Para que esto sea así, la masa interior M debe ser proporcional al radio r y así anular la dependencia de v indicada por la ecuación 7.47. Esto es:

$$M_{osc} \propto r \tag{7.48}$$

Esto es radicalmente diferente a lo que se esperaría de la materia visible (estrellas y gas), cuya masa se concentra en el centro de la galaxia. Este hecho llevó a la conclusión de que las galaxias están incrustadas en un vasto halo de materia oscura que se extiende mucho más allá de las estrellas visibles y es responsable de la mayor parte de la masa de la galaxia.
Este es un ejemplo fascinante de cómo una simple ley de la mecánica clásica, cuando se aplica a una nueva escala, revela un aspecto fundamental y previamente desconocido del universo.

Capítulo 8

Movimiento relativo

En los capítulos anteriores, establecimos las bases de la Dinámica, enfocándonos en cómo las fuerzas causan la aceleración de una partícula y analizando el trabajo y la energía asociados con ese movimiento. Sin embargo, toda la descripción del movimiento (posición, velocidad y aceleración) ha dependido implícitamente de un único sistema de referencia fijo (punto fijo desde el cual se mide el movimiento), típicamente llamado un marco de referencia inercial.
El movimiento relativo, en cambio, describe cómo la trayectoria y la velocidad de un objeto difieren cuando se observan desde distintos sistemas de referencia. Una propiedad de estos dos sistemas de referencia es que pueden estar en movimiento relativo entre sí (traslación y/o rotación).
Por lo tanto, este capítulo abordará las transformaciones matemáticas necesarias para pasar de la descripción del movimiento de una partícula vista por un observador A a la descripción de ese mismo movimiento vista por un observador B, especialmente cuando el observador B está en movimiento acelerado con respecto a A.

8.1. Cinemática relativista clásica

Aquí es importante hacer la distinción entre sistemas de referencia, los cuales se pueden separar en dos: Sistema de referencia **inercial** y **no inercial**. En el primero, describe un sistema de referencia en el que un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento uniforme permanece en movimiento uniforme, a menos que actúe sobre él una fuerza neta. Es decir, que en estos sistemas se cumple la primera ley de Newton. Un sistema de referencia inercial es aquel que no está acelerando o rotando. Una forma de verlo es notar que estos sistemas no están acelerados respecto a estrellas lejanas (idealmente). Por otro lado, un sistema no inercial es aquel que está acelerando con respecto a un sistema inercial. Para aplicar las leyes de Newton en estos sistemas, se deben introducir fuerzas ficticias (o pseudo-fuerzas) como Coriolis, centrífuga y de Euler.

La relación general entre posiciones en dos sistemas, uno inercial (I) y uno no inercial (NI), se da por:

$$\boxed{\vec{r}_I = \vec{R} + \vec{r}_{NI}} \tag{8.1}$$

donde $\vec{r}_I$ es el vector posición de una partícula medido en el sistema de referencia inercial I, $\vec{r}_{NI}$ es el vector de posición medido en el sistema no inercial NI, y $\vec{R}$ es la posición del origen del sistema no inercial NI medida con respecto al sistema inercial I.

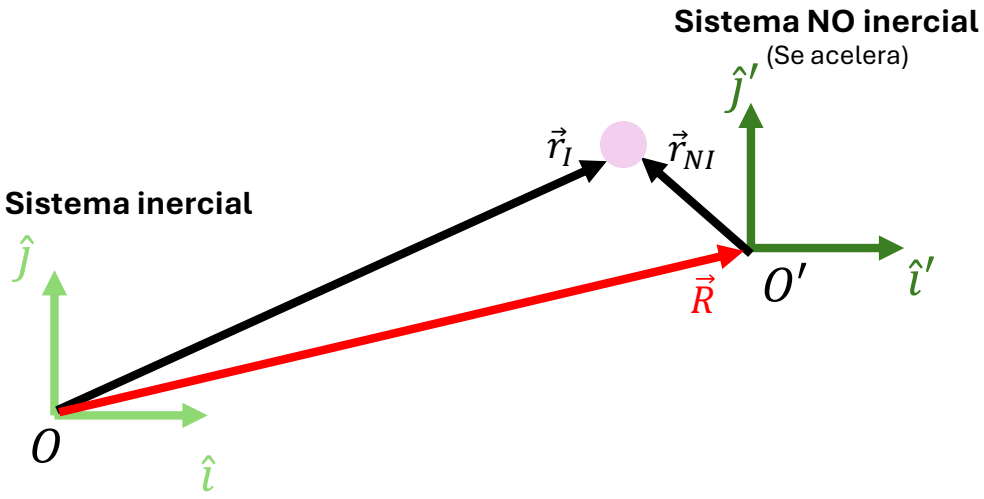


Figura 8.1: Todo movimiento relativo se puede describir con la siguiente imagen: Primero definimos un sistema de referencia quieto cuyo origen es O. Al estar quieto le llamaremos sistema de referencia inercial. Si existe un sistema de referencia no inercial (llamado O') tendrá como caracteristica que se acelera con respecto al sistema inercial. Por lo tanto, los vectores que usamos apare describir la posición (u otra cantidad física) no pueden ser el mismo en ambos sistemas. Para que la descripción desde el sistema de referencia no inercial, hay que considerar el vector $\vec{R}$, el cual describe la traslación entre ambos sistemas de referencia.

Ejercicio resuelto
Un carrusel gira con una velocidad angular constante de $\vec{\omega}_0$ =0.5 $\hat{k}$ rad/s, donde el eje $\hat{k}$ es vertical (perpendicular al plano del carrusel). El centro del carrusel se mueve hacia el este con una velocidad constante de 2.0 $\hat{i}$ m/s con respecto a un sistema de referencia inercial I. Una niña se encuentra en el carrusel en la posición $\vec{r}_{NI} = 4\hat{i}$ m, medida desde el centro del carrusel. Determina la posición de la niña en el sistema inercial en el tiempo t=0 y en el tiempo t=3 s.

R: Lo primero que notamos es que el centro u origen del sistema no inercial se desplaza con una velocidad constante $\vec{v}_0$. Luego, podemos tratar el desplazamiento relativo de los orígenes como un problema de la cinemática, donde la posición en el tiempo es (ecuación 2.8:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t = \vec{0} + (2t)\hat{i} = (2t)\hat{i} \tag{8.2}$$

Como el punto de la niña está fijo en el marco giratorio (no se desplaza respecto al carrusel), su vector relativo gira con el carrusel. Por lo tanto, tiene la misma velocidad angular. Como inicialmente se encuentra en la posición $4\hat{i}$, significa que el ángulo θ es igual a cero. Esto permite escribir su posición, con respecto al sistema no inercial de manera general como:

$$\vec{r}_{NI} = 4\cos(\theta)\hat{i} + 4\sin(\theta)\hat{j} \tag{8.3}$$

Ahora, si parte de un ángulo igual a cero y la velocidad angular es constante, significa que la aceleración angular es cero. Esto permite escribir la ecuación 2.40 (cinemática para ángulos) como: $\vec{\theta} = \vec{\omega}_0 t$. Esto implica que la posición de la niña se puede escribir como:

$$\vec{r}_{NI}(t) = 4\cos(\omega_0 t)\hat{i} + 4\sin(\omega_0 t)\hat{j} \tag{8.4}$$

Luego, el desplazamiento de la niña con respecto al sistema de referencia inercial es reemplazar en la ecuación 8.1:

$$\vec{r}_I(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{NI}(t) = (2t)\hat{i} + 4\cos(\omega_0 t)\hat{i} + 4\sin(\omega_0 t)\hat{j} = [2t + 4\cos(0.5t)]\hat{i} + 4\sin(0.5t)\hat{j} \tag{8.5}$$

Para el caso en que t=0 s, tenemos que $\vec{r}_I(0) = 4\hat{i}\ \ m$, lo que indica que en el tiempo inicial, ambos orígenes coinciden en el tiempo y espacio. Ahora, para el caso en que $t = 3\ \ s$, basta con reemplazar:

$$\vec{r}_I(3) = [2 * 3 + 4\cos(0.5 * 3)]\hat{i} + 4\sin(0.5 * 3)\hat{j} \approx 6.29\hat{i} + 3.99\hat{j}\ \ m \tag{8.6}$$

La magnitud (distancia total a la que se encuentra la niña para este tiempo) es $r_I \approx \sqrt{6.29^2 + 3.99^2} \approx 7.5\ m$. El ángulo al que se encuentra es $\theta_3 = \arctan(3.99/6.29) \approx 0.55$ rad $\approx 32°$.

8.2. Velocidad y aceleración en un sistema no inercial

La derivada de un vector de posición con respecto al tiempo, vista desde dos sistemas de referencia diferentes, es fundamental para relacionar la velocidad y la aceleración. Aquí es importante destacar que un sistema de referencia inercial, digamos, puede estar fijo. Por un lado diremos que tiene una base ortonormal $\hat{i}$. Por lo tanto, la descomposición en componentes de un vector $\vec{A}$ se puede escribir como:

$$\vec{A} = A_1\hat{i}_1 + A_2\hat{i}_2 + A_3\hat{i}_3 + ... = \sum_{j=1}^{N} A_j\hat{i}_j = A_j\hat{i}_j \tag{8.7}$$

Por simplicidad, hemos aplicado el convenio de la suma de Einstein, el cual indica que, para hacer más simple los cálculos y su escritura, diremos que cada índice repetido (en este caso el índice j determina tanto la componente A_j como el vector unitario $\hat{i}_j$) representa una sumatoria, por lo que no necesitaremos escribir el símbolo de suma. De hecho, uno

podría representar un producto punto con esta convención, ya que también es una suma de componentes:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2=A_1A_1+A_2A_2+A_3A_3+...=\sum_{j=1}^{N}A_jA_j=A_jA_j \tag{8.8}$$

Por otro lado, un vector $\vec{B}$ en un sistema de referencia no inercial también debe poder expresarse en su propio sistema coordenado como:

$$\vec{B}=B_1\hat{n}_1+B_2\hat{n}_2+B_3\hat{n}_3+...=\sum_{j=1}^{N}B_j\hat{n}_j=B_j\hat{n}_j \tag{8.9}$$

Lo importante de estos sistemas es que cada vector debe ser capaz de ser descrito en términos del otro sistema de referencia. Como el sistema no inercial se desplaza con respecto al sistema fijo (inercial), pero también puede rotar con respecto al sistema fijo, el cambio de posición en el tiempo debe incorporar estos efectos. Es decir, que el sistema no inercial no solo se traslada con respecto al sistema fijo inercial, sino que puede rotar con una velocidad angular $\vec{\omega}(t)$. Con esto, consideremos el cambio temporal del vector $\vec{B}(t)$ (en el sistema no inercial) desde el punto de vista del sistema fijo:

$$\left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_I=\frac{d}{dt}(B_j\hat{n}_j)=\dot{B}_j\hat{n}_j+B_j\dot{\hat{n}}_j \tag{8.10}$$

Por definición, el primer término de la derecha es justamente el cambio del vector $\vec{B}$ con respecto al sistema no inercial. Esto transforma la ecuación en:

$$\left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_I=\left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_{NI}+B_j\dot{\hat{n}}_j \tag{8.11}$$

Esto implica que las derivadas de un vector en diferentes sistemas coordenados difieren por una cantidad $B_j\dot{\hat{n}}_j$, que representa el cambio temporal de la base coordenada con respecto al tiempo. El primer término de la derecha en la ecuación 8.11 representa la traslación de dicho vector. No obstante, como el sistema de referencia también puede rotar, el segundo término de la derecha debe incorporar la rotación con $\vec{\omega}$ de alguna manera. Para esto, primero notamos que:

$$\frac{d}{dt}|\hat{n}_k|^2=\frac{d}{dt}(\hat{n}_k\cdot\hat{n}_k)=\dot{\hat{n}}_k\cdot\hat{n}_k+\hat{n}_k\cdot\dot{\hat{n}}_k=2\hat{n}_k\cdot\dot{\hat{n}}_k=0. \tag{8.12}$$

donde hemos considerado que el largo de un vector unitario es por definición uno y no cambia en el tiempo, por lo que elevarlo al cuadrado también da uno, por lo que su derivada (de una constante) da cero. Luego, esto impone que $\dot{\hat{n}}_k$ es perpendicular a $\hat{n}_k$. De una forma más general, podemos considerar el producto punto de vectores unitarios diferentes:

$$\frac{d}{dt}(\hat{n}_i\cdot\hat{n}_j)=\dot{\hat{n}}_i\cdot\hat{n}_j+\hat{n}_i\cdot\dot{\hat{n}}_j=0\Longrightarrow\dot{\hat{n}}_i\cdot\hat{n}_j=-\hat{n}_i\cdot\dot{\hat{n}}_j \tag{8.13}$$

Este caso es igual a cero porque las bases son por definición perpendiculares entre sí ($\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j = 0$) por lo que su derivada temporal también es cero. Si multiplicamos por $\hat{n}_i$, tenemos:

$$\hat{n}_i(\dot{\hat{n}}_i \cdot \hat{n}_j) = -\hat{n}_i(\hat{n}_i \cdot \dot{\hat{n}}_j) \tag{8.14}$$

Por la convención de suma de Einstein, tenemos que $\hat{n}_i\hat{n}_i$ es una suma de las componentes. Por definición, la suma de las componentes ortonormales son normales, lo que quiere decir que suman 1. Una matriz que da 1 es la matriz identidad $\mathbf{I}$, por lo que el lado derecho de la ecuación 8.14 es $\hat{n}_i(\hat{n}_i \cdot \dot{\hat{n}}_j) = \mathbf{I} \cdot \dot{\hat{n}}_j = \dot{\hat{n}}_j$. Por otro lado, tenemos una identidad del cálculo vectorial que es $\vec{x} \times \vec{y} \times \vec{z} = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{x}(\vec{y} \cdot \vec{z})$, lo que nos permite escribir:

$$\hat{n}_i \times \dot{\hat{n}}_i \times \hat{n}_j = \dot{\hat{n}}_i(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j) - \hat{n}_i(\dot{\hat{n}}_i \cdot \hat{n}_j) \tag{8.15}$$

Reemplazando la ecuación 8.14 en 8.15, tenemos:

$$(\hat{n}_i \times \dot{\hat{n}}_i) \times \hat{n}_j = \dot{\hat{n}}_i(\hat{n}_i \cdot \hat{n}_j) - (-\hat{n}_i)(\hat{n}_i \cdot \dot{\hat{n}}_j) = \dot{\hat{n}}_j \tag{8.16}$$

donde hemos aplicado que el segundo término de la derecha es en efecto la matriz identidad por $\dot{\hat{n}}_j$ y el primer término es igual a cero porque $\hat{n}_i$ y $\hat{n}_j$ son ortogonales entre sí (no se proyectan uno sobre otro y por tanto su producto punto da cero). Ahora notamos que $\dot{\hat{n}}_j$ es igual al producto cruz de tres vectores diferentes, pero dos de ellos son vectores unitarios que trabajan sobre el mismo índice i. De la ecuación 2.53 que define la velocidad angular ($\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$), notamos que se define en función de una posición y su velocidad. Si hacemos el cambio de variable y ahora el vector posición es $\hat{n}$ y su velocidad es $\dot{\hat{n}}$ podemos definir la velocidad angular como: $\vec{\omega} = \frac{\hat{n} \times \dot{\hat{n}}}{|n|^2} = \hat{n} \times \dot{\hat{n}}$, donde $|\hat{n}|^2 = 1$. Esto significa que el término entre paréntesis del lado izquierdo de la ecuación 8.17 es $\vec{\omega} \times \hat{n}_j$. Reemplazando, tenemos que:

$$\dot{\hat{n}}_j = \vec{\omega} \times \hat{n}_j \tag{8.17}$$

Ahora, multiplicando por la componente B_j, nos queda:

$$B_j\dot{\hat{n}}_j = \vec{\omega} \times (B_j\hat{n}_j) = \vec{\omega} \times \vec{B} \tag{8.18}$$

Ahora, reemplazando en la ecuación 8.11, tenemos:

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{B}} \tag{8.19}$$

Note que esta expresión es la generalización de la ecuación 2.56 ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), para el caso de la velocidad de una partícula en rotación. La diferencia es que, al ser el mismo sistema inercial, el primer término de la derecha en la ecuación 8.19 es cero. Luego, tenemos que cualquier cambio temporal de un vector B medido desde un sistema de referencia inercial (fijo) se puede escribir como el cambio temporal de dicho vector en el sistema de referencia no inercial más el producto cruz de dicho vector con la velocidad angular (medida desde el sistema de referencia inercial).

Con esta regla, podemos calcular la velocidad de un sistema de referencia no inercial con respecto al sistema fijo. Esto sería $\vec{B} = \vec{r}_{NI}$, lo que implicaría:

$$\left.\frac{d\vec{r}_{NI}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{r}_{NI}}{dt}\right|_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = \vec{v}_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} \tag{8.20}$$

Volviendo a la ecuación 8.1 para la velocidad total, tenemos:

$$\vec{r}_I = \vec{R} + \vec{r}_{NI} \rightarrow \vec{v}_I = \dot{\vec{R}} + \left.\frac{d\vec{r}_{NI}}{dt}\right|_I \tag{8.21}$$

En su forma completa, la velocidad es:

$$\boxed{\vec{v}_I = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI}} \tag{8.22}$$

Esta relación quiere decir que la velocidad de un sistema no inercial, para ser equivalente a la de un sistema fijo (inercial), requiere de una serie de términos. Uno asociado a la velocidad a la cual se alejan o acercan los sistemas de referencias ($\dot{\vec{R}}$), otro a la velocidad de una partícula medida en el sistema de referencia no inercial ($\vec{v}_{NI}$) y, finalmente, a la rotación de la partícula con respecto al sistema inercial ($\vec{\omega} \times \vec{r}_{NI}$).

Ejercicio resuelto
Un carrusel circular de radio R=3 m gira con velocidad angular constante ω=0.5 $\hat{k}$ rad/s (eje vertical $\hat{k}$). El carrusel se traslada hacia el este con velocidad constante $\dot{\vec{R}} = 2\ \hat{i}\ m/s$ respecto a un sistema inercial I. En este sistema, una niña se encuentra en el borde del carrusel, a r_{NI} =3 $\hat{i}$ m desde el centro del carrusel. La niña camina sobre el carrusel a $v_{NI} = 1\ \hat{j}\ m/s$ respecto al carrusel (dirección tangencial, positiva antihoraria, desde el este hacia el norte). Determina la velocidad de la niña medida desde el sistema inercial.

R: Para calcular esta velocidad, usamos la ecuación 8.22. Aquí notamos cómo gira el sistema de referencia no inercial (carrusel). Esto es:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = (0.5\hat{k}) \times (3\hat{i})\frac{rad \cdot m}{s} = 1.5\frac{m}{s}(\hat{k} \times \hat{i}) = 1.5\frac{m}{s}\hat{j} \tag{8.23}$$

Como para este ejemplo las velocidades de la niña en el sistema de referencia no inercial (carrusel) y la velocidad relativa entre los sistemas de referencia son conocidos, podemos reemplazar los valores directamente en la ecuación 8.22:

$$\vec{v}_I = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = (2\hat{i}) + (1\hat{j}) + (1.5\hat{j})\frac{m}{s} = 2\hat{i} + 2.5\hat{j}\frac{m}{s} \tag{8.24}$$

La velocidad absoluta de la niña en el carrusel, por tanto, es $\approx$2.12 m/s, lo cual es más del doble de lo que ella percibe.

8.2.1. Aceleración no inercial

Para obtener la aceleración, se requiere utilizar el mismo procedimiento. Esto es:

$$\vec{a}_I = \left.\frac{d\vec{v}_I}{dt}\right|_I = \left.\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{R}} + \vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right)\right|_I = \ddot{\vec{R}} + \left.\frac{d\vec{v}_{NI}}{dt}\right|_I + \left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI})\right|_I \tag{8.25}$$

Para el segundo término del lado derecho, aplicamos la ecuación encontrada en 8.19. Esto es:

$$\left.\frac{d\vec{v}_{NI}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{v}_{NI}}{dt}\right|_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} = \vec{a}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} \tag{8.26}$$

El último término de la ecuación 8.25 es:

$$\left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI})\right|_I = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}_{NI}}{dt}\right|_I \tag{8.27}$$

La derivada parcial en el segundo término es la misma que la mostrada en la ecuación 8.20. Luego:

$$\left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI})\right|_I = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times(\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}) = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI} \tag{8.28}$$

Reemplazando 8.26 y 8.28 en ecuación 8.25, tenemos que la aceleración es:

$$\boxed{\vec{a}_I = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_{NI} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}} \tag{8.29}$$

Esta es la ecuación general de aceleración para partículas en un marco no inercial que rota y se traslada. Note que los últimos tres términos son precisamente los términos de aceleración ficticia que aparecen cuando trabajamos desde un marco no inercial. Esta ecuación se puede escribir de manera compacta:

$$\boxed{\vec{a}_I = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_{NI} + \vec{a}_{coriolis} + \vec{a}_{Euler} + \vec{a}_{centrifuga}} \tag{8.30}$$

donde $\vec{a}_{coriolis}$, $\vec{a}_{Euler}$ y $\vec{a}_{centrifuga}$ corresponden a aceleraciones ficticias que el sistema no inercial detecta. En mayor detalle tenemos que $\vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI}$, la cual aparece cuando existe una velocidad relativa de la partícula en el marco rotante (no inercial), $\vec{a}_{Euler} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI}$ la que aparece si la velocidad angular del marco cambia con el tiempo (como la de un carrusel que está acelerando su rotación) y $\vec{a}_{centrifuga} = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}$, la que se experimenta aunque la partícula esté en reposo relativo al marco.

Ejercicio resuelto
Un carrusel tiene velocidad angular que varía con el tiempo de la forma $\omega = 0.5{+}0.1t\ rad/s$ en la dirección $\hat{k}$. El centro del carrusel tiene una aceleración respecto al sistema inercial dada por $\ddot{\vec{R}}(t) = 1.5\ \hat{i}\ m/s^2$. En un instante concreto $t = 2\ s$, tenemos que un niño se mueve en el

carrusel de la siguiente manera: está en 3 m, con una velocidad de 0.5 m/s hacia el centro del carrusel y una aceleración de 0.1 m/s^2 (a punto de detenerse). Calcular la aceleración absoluta del niño en el sistema de referencia inercial en ese instante.

R: Del enunciado tenemos directamente $\ddot{\vec{R}}(t)$ y también $\vec{a}_{NI}$. Esto significa que necesitamos encontrar los valores de las aceleraciones ficticias. Partamos por Coriolis:

$$\vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} = 2(0.5{+}0.1t\hat{k} \;\; rad/s) \times (-0.5\hat{i} \;\; m/s) = -(0.5{+}0.1t)\hat{j} \;\; m/s^2 \quad (8.31)$$

Para el tiempo señalado, la aceleración de Coriolis es: $\vec{a}_{coriolis}(2) = -0.7\ \hat{j} \;\; m/s^2$. Aquí se ha asumido que el desplazamiento del niño hacia el centro del carrusel coincide en el eje coordenado $\hat{i}$. Por lo tanto, un signo positivo significa acercarse al eje y un signo negativo, que se aleja del eje.
Ahora pasamos a la aceleración de Euler:

$$\vec{a}_{Euler} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{NI} = (0.1\hat{k} \;\; rad/s^2) \times 3\hat{i} \;\; m = 0.3\ \hat{j} \;\; m/s^2 \quad (8.32)$$

Finalmente, consideramos la aceleración centrífuga:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{centrifuga} &= \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = (0.5{+}0.1t\hat{k}) \times (0.5{+}0.1t\hat{k}) \times (3\hat{i}) \;\; m/s^2 \\ &= (0.5{+}0.1t\hat{k}) \times (1.5{+}0.3t\hat{j}) \;\; m/s^2 = (0.5{+}0.1t)(1.5{+}0.3t)(\hat{k} \times \hat{j}) \;\; m/^2 \\ &= -(0.5{+}0.1t)(1.5{+}0.3t)\hat{i} \;\; m/s^2 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Para el tiempo indicado, tenemos $\vec{a}_{centrifuga}(2) = -1.47\ \hat{i}\ m/s^2$. Luego, la aceleración total para este momento es la suma de todas estas aceleraciones:

$$\begin{aligned} \vec{a}_I &= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}_{NI} + \vec{a}_{coriolis} + \vec{a}_{Euler} + \vec{a}_{centrifuga} \\ &= 1.5\hat{i} + 0.1\hat{i} - 0.7\hat{j} + 0.3\ \hat{j} - 1.47\hat{i} = 0.13\hat{i} - 0{,}4\hat{j} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Luego, la aceleración absoluta es $|\vec{a}_I(2)| = \sqrt{0.13^2 + 0.4^2} \;\; m/s^2 \approx 0.42\ m/s^2$. Esta aceleración es más de cuatro veces la que percibe el niño.

8.3. La ecuación de movimiento para sistemas no inerciales

Cuando observamos el movimiento de un objeto desde un sistema de referencia no inercial (que acelera o rota), las leyes de Newton no se aplican directamente. Para corregir esto, se introducen fuerzas ficticias que .explican"las aceleraciones observadas. La ecuación de movimiento se convierte en:

$$\boxed{m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{ficticias}} \quad (8.35)$$

lo cual contrasta fuertemente con la forma de la ecuación para la segunda ley de Newton para sistemas de referencia inerciales: $\boxed{m\vec{a}_I = \vec{F}_{reales}}$. en la ecuación 8.35 tenemos que las fuerzas ficticias son:

$$\vec{F}_{ficticias} = \vec{F}_{Tras} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{Euler} + \vec{F}_{centrifuga} \tag{8.36}$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{Tras} &= -m\ddot{\vec{R}}, && \text{Traslación entre sistemas} \\ \vec{F}_{Coriolis} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI}, && \text{Fuerza de Coriolis} \\ \vec{F}_{Euler} &= -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{NI}, && \text{Fuerza de Euler} \\ \vec{F}_{centrifuga} &= -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI}, && \text{Fuerza Centrifuga} \end{aligned}} \tag{8.37}$$

Note que si define $\vec{r}_{NI} = r\hat{r}$ y $\vec{\omega} = \omega\hat{\theta}$, tenemos que la aceleración centrífuga es: $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = r\omega^2(\hat{\theta} \times \hat{\theta} \times \hat{r}) = -r\omega^2\hat{r}$, la cual es la aceleración centrípeta dada por la ecuación 2.109. Si consideramos el factor $-m$, la fuerza centrífuga cambia de signo ($\vec{F}_{centrifuga} = mr\omega^2\hat{r}$), indicando que la fuerza es contraria a la aceleración centrípeta.

Ejercicio resuelto
Calculemos la tensión en una cuerda en equilibrio en un carrusel. Supongamos que una masa m=2 kg es atada por una cuerda a un punto del borde del carrusel a una distancia r=3 m del eje de rotación. Si el carrusel gira con ω=0.7 rad/s y el origen del carrusel es inercial ($\ddot{R} = 0$), entonces, encontrar la tensión T de la cuerda (suponiendo que la partícula está en reposo en el sistema no inercial).

R: El hecho de que el sistema no inercial (carrusel) no esté en movimiento relativo del sistema inercial implica que no hay fuerza de traslación ($\vec{R}_{Tras} = \vec{0}$). Como el carrusel gira a una velocidad angular constante, no hay aceleración angular ($\vec{\alpha} = \vec{0}$) y por tanto la fuerza de Euler también es cero ($\vec{F}_{Euler} = \vec{0}$). Adicionalmente, como la masa está en reposo, implica que tanto la velocidad y aceleración en el sistema no inercial son cero, lo que implica que $\vec{a}_{NI} = \vec{0}$ y $\vec{v}_{NI} = \vec{0}$. Esta última condición implica que no hay fuerza de Coriolis ($\vec{F}_{Coriolis} = \vec{0}$). Esto implica que de las fuerzas ficticias, la única que afecta es la fuerza centrífuga, la cual es:

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} = -(2)(0.7\ \hat{k}) \times (0.7\ \hat{k}) \times (3\ \ \hat{i})\ \ N = -2.94\ (-\hat{i})N = 2.94\ (\hat{i})N \tag{8.38}$$

donde hemos definido $\hat{i}$ de manera radial en el carrusel. Esta fuerza es positiva, lo que implica que la fuerza centrífuga se ejerce hacia afuera del carrusel.
Por otro lado, la única fuerza real es la tensión que mantiene a la masa unida al carrusel. Es decir, que esta fuerza es $\vec{T} = -T\hat{i}$. Con esto, reemplazamos en la ecuación 8.35:

$$m\vec{a}_{NI} = \vec{0} = \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{ficticias} = -T\hat{i} + F_{centrifuga}\hat{i} \rightarrow T = F_{centrifuga}$$
$$T = 2.94\ N \tag{8.39}$$

8.3.1. Nave espacial con anillo que rota

Una nave espacial con un anillo rotatorio es un concepto de ingeniería que utiliza la rotación para simular la gravedad. En un entorno de microgravedad, los astronautas experimentan efectos negativos en la salud, como la pérdida de masa ósea y muscular. La solución propuesta es que la nave espacial gire, lo que crea un sistema de referencia no inercial para los ocupantes. La 'gravedad' percibida por los habitantes del anillo es una fuerza ficticia llamada fuerza centrífuga. Un observador dentro del anillo que rota siente que está siendo empujado hacia el exterior, contra el "piso"del anillo.
Como se describe luego de la ecuación 8.37, la fuerza centrífuga para un movimiento con radio r es:

$$\vec{F}_{centrifuga} = mr\omega^2\hat{r} \tag{8.40}$$

donde en este caso ω es la velocidad angular de la nave y r es el radio del anillo. Para simular la gravedad terrestre (g=9.8 m/s^2), la aceleración centrífuga debe ser igual a g. Esto significa que:

$$g = r\omega^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} \tag{8.41}$$

Lo que indica que, para igualar la aceleración de gravedad, la velocidad angular de la nave es proporcional a $r^{-1/2}$. Luego, si la nave tiene un radio de giro pequeño (tiende a cero), la velocidad angular necesaria para igualar a la gravedad diverge.

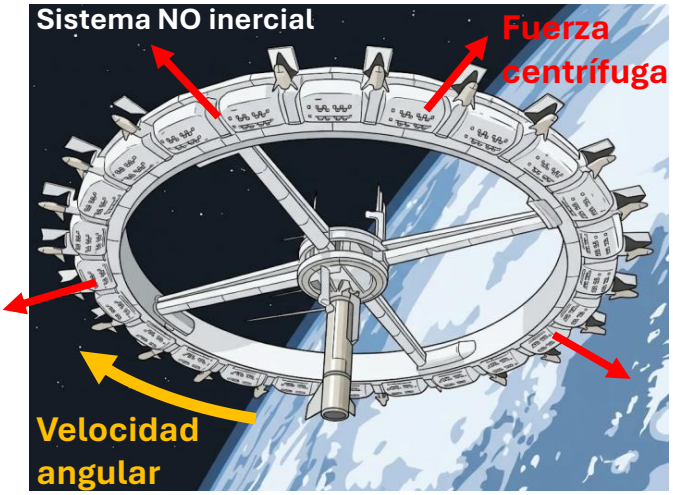


Figura 8.2: El sistema de referencia no inercial genera fuerzas ficticias, como la fuerza centrífuga. Esta ayuda a generar una fuerza hacia afuera, la cual puede ser aprovechada para "simularün a fuerza de gravedad en entornos espaciales. Imagen propia.

Ejercicio resuelto
Considera una nave espacial con un anillo de 150 m de radio. ¿Con qué velocidad angular debe girar para simular la gravedad de la Tierra?

R: Si asumimos que no hay otras fuerzas ficticias (las hay si la nave acelera o desacelera, creando la fuerza de Euler o si el astronauta se desplaza al interior de la nave, creando una fuerza de Coriolis), tenemos que la velocidad angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9.8\ m/s^2}{150\ \ m}} \approx 0.25\ rad/s \tag{8.42}$$

Esto puede escribirse en términos de rpm o revoluciones por minuto:

$$\boxed{\text{rpm} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 60s} \Longrightarrow \text{rpm} = \frac{0.25\ rad/s}{2\pi} \cdot 60s \approx 9.5\ \text{rpm} \tag{8.43}$$

Es decir, que esta nave que gira con un radio de 150 metros debe dar cerca de 10 vueltas por minuto para equiparar la gravedad de la tierra. Esto es, una vuelta cada 6 segundos aproximadamente.

8.3.2. Coriolis en la Tierra

Como se ha mencionado en este capítulo, la fuerza de Coriolis es una fuerza aparente (ficticia) que aparece cuando describimos el movimiento desde un sistema de referencia que rota. No es una interacción física entre cuerpos, pues es la corrección que hay que añadir en el marco rotante para que la segunda ley de Newton conserve su forma. Como muestra la ecuación 8.37, la fuerza de Coriolis depende de la velocidad de una partícula con masa m medida en el sistema de referencia no inercial. Esto quiere decir que depende de la velocidad medida en el sistema que rota, el cual es desde la tierra. La ecuación 2.83 indica que la velocidad en coordenadas esféricas es:

$$\vec{v}_{esf} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} = R_T\dot{\theta}\,\hat{\theta} + R_T\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \tag{8.44}$$

donde se ha considerado el radio de la tierra R_T constante. Para el caso terrestre, la velocidad angular es constante: $\vec{\omega}_T = \vec{\Omega} \approx 7.27 \times 10^{-5}\,\hat{k}$ radianes por segundo. Considerando la ecuación 2.93, tenemos que el vector unitario $\hat{k}$ es $\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$. Por lo tanto, reemplazando en la ecuación 8.37:

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} = -2m\Omega_T(\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}) \times (R_T\dot{\theta}\,\hat{\theta} + R_T\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}) \tag{8.45}$$

Reagrupando, y considerando que no hay variaciones radiales en la superficie de la tierra (componente radial igual a cero), tenemos que la fuerza de Coriolis es:

$$\vec{F}_{Coriolis} \approx 2m\Omega_T R_T(\cos(\theta)\sin(\theta)\dot{\phi}\,\hat{\theta} - \cos(\theta)\dot{\theta}\,\hat{\phi}) \tag{8.46}$$

En navegación y meteorología, normalmente las partículas se mueven lentamente respecto a la rotación de la Tierra. Esto significa que $\dot{\phi} \ll 1$, por lo que el primer término del lado derecho (componente meridional) es mucho menor que el término zonal $-\cos(\theta)\dot{\theta}$:

$$\vec{F}_{Coriolis} \approx -2m\Omega_T R_T \cos(\theta)\dot{\theta}\,\hat{\phi} \tag{8.47}$$

Note que la expresión original de la fuerza de Coriolis en coordenadas esféricas usa la colatitud θ, que es el ángulo entre el eje de rotación de la Tierra ($\hat{k}$) y la posición del punto. Es decir, que para el polo norte θ es igual a cero y en el Ecuador es igual a $\pi/2$. Sin embargo, en la práctica geofísica y meteorológica es más natural usar latitud geográfica φ, la cual parte su medición desde el Ecuador. Es decir, que la conversión entre ambos sistemas de ángulos es $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, lo que implica que $\cos(\theta) = \sin(\varphi)$. Luego, se determina que esta componente está directamente relacionada con el desplazamiento norte-sur. Es decir, que $\dot{\theta}$ es una velocidad angular en la dirección norte-sur. Si consideramos la definición de velocidad angular dada por la ecuación 2.53 $\vec{\omega} = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{r^2}$, podemos escribir esta en función de $\dot{\theta}$ y el radio de la tierra R_T como:

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{r}\times\vec{v}|}{r^2} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{|\vec{R_T}\times\vec{v}_N|}{R_T^2} \tag{8.48}$$

Como el radio es perpendicular a la velocidad en la superficie terrestre, tenemos que $|\vec{R}_T \times \vec{v}_N| = R_T v_N \sin(\pi/2) = R_T v_N$. Esto implica que $\dot{\theta}R_T = v_N$. Agregando esto en la ecuación de Coriolis, finalmente tenemos:

$$\boxed{\vec{F}_{Coriolis} \approx -2m\Omega_T v_N \sin(\varphi)\,\hat{\phi}} \tag{8.49}$$

Esta expresión destaca que la fuerza de Coriolis aparece principalmente cuando las masas se mueven en la dirección Norte-Sur. Aquí es importante recordar que $\hat{\phi}$ es positiva hacia el oeste. Esto significa que esta fuerza tenderá a desviar los objetos a lo largo del eje Este-Oeste. Específicamente, si un objeto se encuentra en el hemisfério norte, tendrá un $\varphi > 0$, moviéndose hacia el norte (velocidad $v_N > 0$) se desviará hacia el oeste ya que se moverá hacia $-\hat{\phi}$. Si el objeto, aún en este hemisfério, se desplaza hacia el sur, tendremos que $v_N < 0$, lo que dará como resultado una dirección positiva de $\hat{\phi}$ (hacia el oeste). En cambio, si un objeto se mueve hacia el sur ($v_N < 0$) con latitud es negativa ($\phi < 0$ y por tanto $\sin(\phi) < 0$), tenderá a desviarse hacia $-\hat{\phi}$, lo que es el este. Si en este hemisferio se mueve hacia el norte, v_N será positiva y por tanto el objeto se desplazará hacia $\hat{\phi}$, que es hacia el oeste.

Ejercicio resuelto
Imagine que un avión de pasajeros se desplaza entre Sevilla y Dublín. Si el avión se mueve a una velocidad v_A= 800 km/h, y si no hay más fuerzas, determinar la distancia y dirección de desvío por fuerza de Coriolis si el piloto no realiza ninguna modificación que compense este efecto.

R: Para estimar lo pedido, primero debemos obtener algunas cantidades. En primer lugar, la distancia entre Sevilla y Dublín es de 1750 km en dirección norte-sur. Por lo tanto, asumiremos que la velocidad del avión es integramente en la dirección norte-sur y por tanto positiva. Luego, como nos encontramos en Europa, y por tanto en el hemisferio norte, $\sin(\phi)$ es positivo. Esto quiere decir que la dirección del movimiento es $-\hat{\phi}$. Como se define positivo hacia el oeste, el avión se desviará hacia el este. Es decir, hacia Inglaterra.
La distancia se puede calcular usando la cinemática; por lo tanto, necesitamos encontrar la aceleración. Esta es la Fuerza de Coriolis (ecuación 8.49) dividida por la masa (si no hay más fuerzas aplicadas):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{Coriolis}}{m} \approx -2\Omega_T v_N \sin(\varphi)\,\hat{\phi} \tag{8.50}$$

Asumiremos que la aceleración es constante además una posición inicial cero que coincide con Sevilla y una velocidad inicial igual a cero (parte del reposo). Esto permite escribir la ecuación 2.17 de la cinemática como:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 = +\frac{1}{2}\vec{a}_0\Delta t^2 = \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_{Coriolis}}{m}\Delta t^2 \\ \implies \vec{r} \approx -\Omega_T v_N \sin(\varphi)\Delta t^2\,\hat{\phi} \end{aligned} \tag{8.51}$$

Ahora, necesitamos calcular los valores faltantes. Por ejemplo, el enunciado no describe el tiempo, pero este se puede estimar al considerar la velocidad y la distancia. Esto es $t = L/v_A = 1750\,km/800\,km/h \approx 2.2\ h$. Esto es equivalente a 7875 s. Ahora, para el ángulo, usaremos el ángulo promedio entre Sevilla ($\approx 37°$) y Dublín ($\approx 53°$), el cual es 45°. Luego, el $\sin(45°)$ ≈0.71. La velocidad del avión v_A es 222.2 m/s. Usando la velocidad angular de la tierra: $\vec{\Omega}$ ≈7.27 $\times 10^{-5}\,\hat{k}$ radianes por segundo, tenemos que la distancia es:

$$\vec{r} \approx -\Omega_T v_N \sin(\varphi)\Delta t^2\,\hat{\phi} = -(7.27\times 10^{-5}\,rad/s)(222.2\ m/s)(0.71)(7875\,s)^2\,\hat{\phi} \approx -710\,km\,\hat{\phi} \tag{8.52}$$

La ecuación tiene signo negativo con respecto a $\hat{\phi}$ (que apunta hacia el oeste). Entonces el desplazamiento lateral es hacia el este. Este valor es enorme porque hemos usado una aproximación muy simple: velocidad constante y aceleración de Coriolis considerada constante usando un ángulo promedio. En la realidad, la fuerza de Coriolis varía con la latitud a lo largo del trayecto. Además, los pilotos corrigen continuamente la trayectoria, evitando desviaciones de cientos de kilómetros. De todas formas, este ejemplo ilustra cómo una fuerza que es despreciable a escala humana (por tener velocidades muy bajas), es relevante para movimientos de escala global.

8.3.3. Péndulo de Foucault en la Tierra

El péndulo de Foucault es un experimento clásico que demuestra de manera visual la rotación de la Tierra. Fue ideado en 1851 por el físico francés Jean Bernard Léon Foucault. En un sistema de referencia no inercial como la Tierra, la trayectoria de un péndulo de este tipo no

permanece fija en el espacio, sino que parece girar gradualmente. Esto se debe (principalmente) a la fuerza de Coriolis, una fuerza ficticia que surge de la rotación de nuestro planeta. Esto genera la precesión del péndulo, que es un fenómeno donde el plano de oscilación del péndulo parece girar con el tiempo, pero en realidad son el observador y el sistema de referencia los que se mueven, debido al movimiento de la Tierra. El péndulo simplemente intenta mantener su plano de oscilación en el espacio absoluto, mientras el suelo bajo él rota con el planeta.
Para este sistema, debemos notar que el sistema inercial (con el centro de la Tierra fijo y no rotante) y el no inercial (la Tierra rotatoria) no se trasladan. Es decir, no se alejan mutuamente, sino que el no inercial (la Tierra que rota) solo gira con velocidad angular constante. Esto quiere decir que las fuerzas de traslación $\vec{F}_{Tras}$ y de Euler $\vec{F}_{Euler}$ son cero para el péndulo de Foucault. Esto significa que la ecuación de movimiento es:

$$m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{centrifuga} \tag{8.53}$$

Las fuerzas reales que se ejercen sobre el péndulo son la gravedad $\vec{F}_g$ y la tensión $\vec{T}$ de la cuerda que sostiene a la masa. Esto es:

$$m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_g + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI} \approx \vec{F}_g + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} \tag{8.54}$$

donde la fuerza centrífuga se ha despreciado debido a que depende de ω^2, el cual para el caso de la tierra ($\vec{\omega} = \Omega_T$) es bastante pequeño, por lo que es despreciable comparado con las demás fuerzas.
Por otro lado, el sistema de referencia no inercial es el sistema que rota, es decir, el que se encuentra en la superficie terrestre donde se encuentra el péndulo. Este es el sistema que nosotros usamos en nuestro día a día, por lo que usualmente se describe como el sistema cartesiano. De esta forma, la posición y velocidad no inerciales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{NI} &= r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}, \\ \vec{v}_{NI} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \end{aligned} \tag{8.55}$$

Aquí definimos $\hat{i}$ hacia el este, $\hat{j}$ hacia el norte y $\hat{k}$ en la vertical terrestre (hacia el exterior del planeta). Para la velocidad angular de la tierra $\vec{\Omega}_T$ escogeremos un sistema de referencia cartesiano, pero que no tiene centro en la superficie de la tierra, sino en el centro de la tierra. Esto significa que la posición de un punto ahora es $\vec{r}_I = r_X\hat{X} + r_Y\hat{Y} + r_Z\hat{Z}$, donde $\hat{Z}$ apunta hacia el polo norte, $\hat{X}$ al Ecuador y $\hat{Y}$ es el resultado de $\hat{Z} \times \hat{X}$, el cual también es hacia el Ecuador, pero ortonormal a $\hat{X}$. Esto automáticamente permite escribir la velocidad angular de la tierra como $\vec{\Omega}_T = \Omega\hat{Z}$. En la ecuación 2.93 tenemos la conversión de unidades entre coordenadas cartesianas y esféricas. Aquí notamos que si tenemos un sistema esférico, tiene similitudes con el sistema cartesiano local. Es decir, la componente radial en el sistema esférico es la componente vertical en la superficie terrestre. Esto es $\hat{r} = \hat{k}$. Adicionalmente, $\hat{\theta}$ aumenta a medida que va hacia el sur, por lo que el norte queda definido por $\hat{j} = -\hat{\theta}$. Por último, habíamos definido ϕ hacia el oeste, lo que implica que $\hat{i} = -\hat{\phi}$. Con esto, la componente vertical del centro de la tierra ($\hat{Z}$) se puede reescribir como:

$$\hat{Z} = \cos(\theta)\hat{k} - \sin(\theta)(-\hat{j}) = \sin(\theta)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k} \Longrightarrow \vec{\Omega} = \Omega\hat{Z} = \Omega(\sin(\theta)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}) \quad (8.56)$$

Luego, en términos de latitud (análogo a lo realizado en la sección de Coriolis), tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, lo que implica que la velocidad angular de la tierra es:

$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T(\cos(\varphi)\hat{j} + \sin(\varphi)\hat{k}) \quad (8.57)$$

Con esto, tenemos que la fuerza de Coriolis es:

$$\begin{aligned} -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} &= -2m\Omega_T(\cos(\varphi)\hat{j} + \sin(\varphi)\hat{k}) \times (v_E\hat{i} + v_N\hat{j}) \\ &\quad -2m\Omega_T(-\cos(\varphi)v_E\hat{k} + \sin v_E\hat{j} - \sin(\varphi)v_N\hat{i}) \\ \Longrightarrow \vec{F}_{Coriolis} &= 2m\Omega_T(v_N\sin(\varphi)\hat{i} - v_E\sin(\varphi)\hat{j} + v_E\cos(\varphi)\hat{k}) \end{aligned} \quad (8.58)$$

Sabiendo que la fuerza de gravedad actúa hacia abajo, podemos escribirla como $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$. Por último, la tensión tiene la forma $\vec{T} = T\hat{u}_p = T\frac{\vec{u}_p}{|\vec{u}_p|}$. Aquí tenemos que $\vec{u}_p$ es la posición dada por la ecuación 8.55. Además, la longitud de este vector es la longitud L de la cuerda. Esto significa que:

$$\vec{T} = T\frac{\vec{u}_p}{|\vec{u}_p|} = T\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{L} \quad (8.59)$$

Para un péndulo lo suficientemente largo, tenemos que $z \approx L$. Luego reemplazamos todo en la ecuación de movimiento (por componentes) dada por la ecuación 8.54:

$$\begin{aligned} &\text{En } \hat{i}, \qquad m\ddot{x} = T\frac{x}{L} + 2m\Omega_T\dot{y}\sin(\varphi) \\ &\text{En } \hat{j}, \qquad m\ddot{y} = T\frac{y}{L} - 2m\Omega_T\dot{x}\sin(\varphi) \\ &\text{En } \hat{k}, \qquad m\ddot{z} = -mg + T + 2m\Omega_T\dot{x}\cos(\varphi) \approx 0 \end{aligned} \quad (8.60)$$

donde $v_E = \dot{x}$ y $v_N = \dot{y}$. También, se ha considerado que la aceleración vertical es despreciable. En esta misma componente, notamos que para pequeños ángulos de oscilación, la componente de Coriolis es pequeña comparada con las fuerzas de gravedad y tensión. Esto permite escribir $T \approx mg$. Luego, las ecuaciones de movimiento del péndulo de Foucault se transforman en:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{En } \hat{i}, \qquad \ddot{x} = g\frac{x}{L} + 2\Omega_T\dot{y}\sin(\varphi) \\ &\text{En } \hat{j}, \qquad \ddot{y} = g\frac{y}{L} - 2\Omega_T\dot{x}\sin(\varphi) \end{aligned}} \quad (8.61)$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas requiere de un procesamiento que va más allá del curso en cuestión. No obstante, podemos dar saltos en su resolución, cuyos pasos intermedios pueden ser resueltos por los alumnos. En primer lugar, debemos establecer una variable imaginaria de la forma $\xi = x + iy$, donde en este caso i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Esto significa que $\ddot{\xi} = \ddot{x} + i\ddot{y}$. Al aplicar esto, tenemos que la ecuación para ξ es:

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_T \sin(\varphi)\dot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0 \tag{8.62}$$

donde $\omega_0 = g/L$. Al establecer una solución del tipo $\xi(t) = e^{\lambda t}$, tenemos que esta ecuación compleja se transforma en:

$$\lambda^2 + 2i\Omega_T \sin(\varphi)\lambda - \omega_0^2 = 0 \tag{8.63}$$

La solución para esta ecuación de segundo grado es:

$$\lambda = -i\Omega_T \sin(\varphi) \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\Omega_T \sin(\varphi))^2} \approx -i\Omega_T \sin(\varphi) \pm \omega_0 \tag{8.64}$$

Esto se debe a que la velocidad angular de la tierra es mucho menor que la velocidad angular natural del péndulo ($\Omega_T \ll \omega_0$).
Luego, la solución general para $\xi(t)$ es:

$$\xi(t) = Ae^{i(-i\Omega_T \sin(\varphi)+\omega_0)t} + Be^{i(-i\Omega_T \sin(\varphi)-\omega_0)t} \tag{8.65}$$

Aquí, para recuperar las funciones $x(t)$ e $y(t)$, tenemos que considerar que $x =$Re(ξ) y que $y =$Im(ξ). Es decir, una es la parte real y la otra la parte imaginaria de ξ. Esto nos deja con:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= X_0 \cos(\omega_0 t)\cos(\Omega_T \sin(\varphi)t) - Y_0 \sin(\omega_0 t)\sin(\Omega_T \sin(\varphi)t) \\ y(t) &= X_0 \cos(\omega_0 t)\sin(\Omega_T \sin(\varphi)t) + Y_0 \sin(\omega_0 t)\cos(\Omega_T \sin(\varphi)t) \end{aligned}} \tag{8.66}$$

Considerando que $\Omega_T \sin(\varphi) \ll \omega_0$, tenemos que $\cos(\Omega_T \sin(\varphi)t) \approx 1$ y $\sin(\Omega_T \sin(\varphi)t) \approx \Omega_T \sin(\varphi)t$, lo que es válido para tiempos cortos (como el de unas horas). Si hacemos coincidir que el movimiento comienza a lo largo del eje norte-sur o el eje este-oeste, tenemos que $X_0 = 0$, $Y_0 = B$ y $X_0 = A$, $Y_0 = 0$ respectivamente. Considerando el segundo caso, tenemos que la ecuación final del péndulo de Foucault es:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t)\cos(\theta_{pre}) \\ y(t) &= A\cos(\omega_0 t)\sin(\theta_{pre}) \end{aligned}} \tag{8.67}$$

donde el término θ_{pre} es igual a $\Omega_T \sin(\varphi)t$, lo que indica el ángulo de precesión del péndulo (la desviación con respecto al movimiento inicial).

Estas aproximaciones permiten trabajar con ecuaciones mucho más sencillas, manteniendo la esencia física: el péndulo oscila armónicamente mientras su plano de oscilación gira lentamente debido a la rotación de la Tierra.

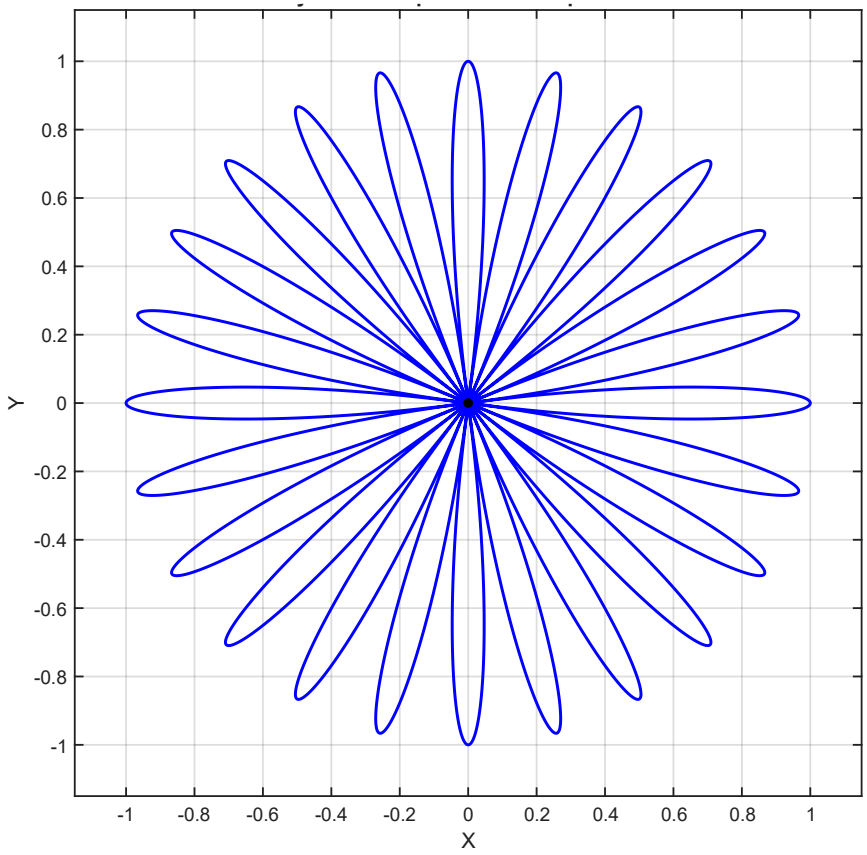


Figura 8.3: La forma de la trayectoria que marca el péndulo de Foucault es de este estilo. Note que en la realidad el péndulo gira muy lentamente por lo que describir todas las ocilaciones en un gráfico como este solo genera una mancha que cubre todo el gráfico.

Ejercicio resuelto
Imaginemos que ponemos un péndulo de Foucault en el interior de la catedral de Sevilla. Si la altura es de 40 m y la amplitud de oscilación es 2 m, calcular la precesión (cuánto se desvía el plano de oscilación del péndulo desde que comienza a oscilar) luego de 12 hrs y la posición en ese momento.

R: Tenemos que la frecuencia de oscilación es $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx \sqrt{(9.8\ m/s)/(40\,m)} \approx 0.5\,s^{-1}$.Esto es equivalente a un período de $T = 2\pi/\omega_0 \approx 12.6\ s$.
Adicionalmente, consideremos que la latitud de Sevilla es aproximadamente 37.4°. Esto implica que $\sin(\varphi) \approx 0.607$. Doce horas son equivalentes a 43200 segundos. Si tomamos la velocidad angular de la Tierra, tenemos que la precesión es:

$$\theta_{pre} = \Omega_T \sin(\varphi) t \approx (7.27 \times 10^{-5}\, rad/s)(0.607)(43200\,s) \approx 1.91\ rad \approx 109.4^\circ \qquad (8.68)$$

Es decir, que después de 12 horas, el plano de oscilación ha girado aproximadamente 109° en

Sevilla. Ahora, la posición es: $x = 2\cos(1.91)$ =-0.66 m y $y = 2\sin(1.91)$ =1.88 m. Note que aquí se ha considerado que $\cos(\omega_0 t)$ es máximo (e igual a 1).

Capítulo 9

Vectores deslizantes

En el capítulo anterior completamos nuestro análisis de la Cinemática, la rama de la mecánica que describe el movimiento de partículas y observadores. Aprendimos a relacionar la velocidad y la aceleración vistas desde diferentes marcos de referencia. Sin embargo, en todos esos análisis, dimos por sentado que las partículas eran puntos ideales y que el movimiento no dependía del tamaño o la forma del objeto.
Este capítulo marca nuestro regreso a la Dinámica, además de ser la transición fundamental de la dinámica de partículas a la dinámica de cuerpos extensos. Para hacer esta transición, debemos introducir una herramienta matemática que capture el efecto de una fuerza sin importar dónde se aplique a lo largo de su línea de acción: el Vector Deslizante.
Un vector deslizante (o vector de línea) es una entidad vectorial cuya acción física depende no solo de su magnitud y dirección, sino también de la línea de acción (línea recta imaginaria e indefinida que pasa a través del punto de aplicación del vector y es paralela a su dirección) a lo largo de la cual se aplica. Sin embargo, su punto específico de aplicación a lo largo de esa línea no es relevante para el efecto físico total que produce en un cuerpo rígido. La definición de este vector puede enunciarse como:

Un vector deslizante puede trasladarse a lo largo de su línea de acción sin alterar el efecto rotacional (momento) del sistema.

El concepto de vector deslizante es fundamental en la estática y la dinámica del cuerpo rígido, ya que la mayoría de las fuerzas externas (como la fuerza de gravedad o la fuerza de empuje de un motor) se consideran deslizantes. Por ejemplo, si empujamos un libro con una regla recta en diferentes puntos a lo largo de la misma línea de acción, el libro se moverá igual (misma traslación y rotación).
Matemáticamente, la línea de acción de un vector deslizante $\vec{v}$ se define como la recta (o conjunto de puntos) que pasa por un punto dado P_0 en la dirección de $\vec{v}$. Es decir:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}} \tag{9.1}$$

donde $\vec{r}$ representa la posición de todos los puntos que pertenecen a la recta, $\vec{r}_0$ la posición de un punto particular P_0 que también pertenece a esa recta y t un parámetro que permite

recorrer toda la recta hacia ambos sentidos infinitos.
Un sistema de estos vectores deslizantes es una colección de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ que, cuando se aplican simultáneamente a un cuerpo, producen un efecto combinado. El objetivo de analizar dicho sistema es encontrar un sistema equivalente más simple, generalmente compuesto por una **Fuerza Resultante** y un **Momento Resultante** que actúen en un punto específico.
La fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas en el sistema. Determina el efecto de traslación neta sobre el cuerpo rígido y su ecuación es:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{9.2}$$

El momento resultante es la suma vectorial de los momentos (torques) generados por cada fuerza $\vec{F}_i$ con respecto a un punto de referencia elegido O. Determina el efecto de rotación neta sobre el cuerpo rígido. Nota que el término torque es ampliamente utilizado para describir esta cantidad. No obstante, en ingeniería también se suele usar la palabra momento como la palabra torque para el producto de la posición por la fuerza. Aunque a veces se prefiere 'momento' en contextos estáticos y 'torque' en dinámicos.
El momento (o torque) resultante se denota por:

$$\vec{M}_0^R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{0,i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{9.3}$$

Luego, el sistema se reduce al par $(\vec{R}, \vec{M}_0^R)$ actuando en el punto O.

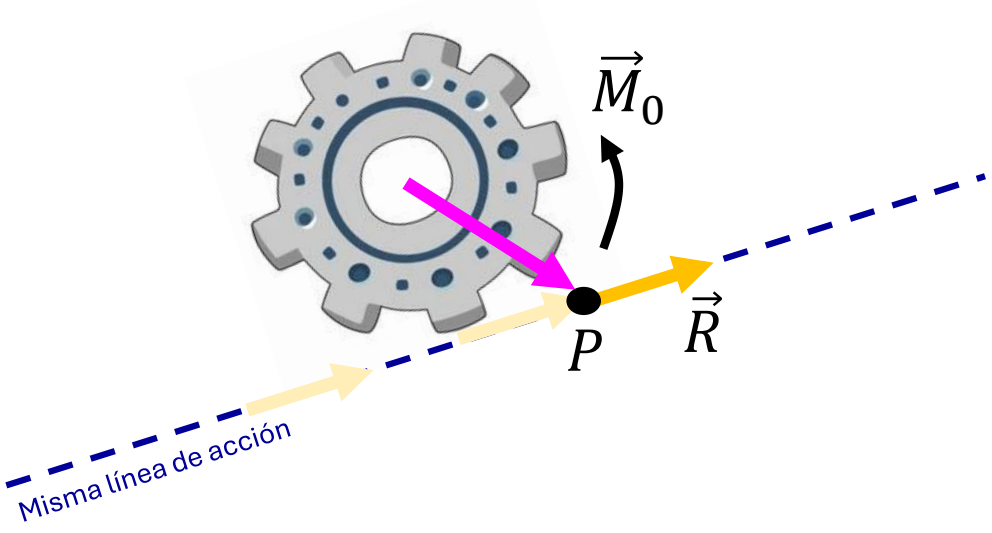


Figura 9.1: Un conjunto de vectores deslizantes genera una fuerza resultante $\vec{R}$ que tiene la capacidad de generar un momento de giro $\vec{M}_0$ estable en el sistema (que no cambia).

9.1. Soportes y momentos

El soporte es un elemento físico externo al cuerpo rígido (como una pared, una bisagra, un rodillo o una cuerda). Es el punto o la forma en que un cuerpo rígido está conectado a su entorno, y su propósito es restringir el movimiento del cuerpo (traslación, rotación, o ambas). Al imponer estas restricciones, el soporte genera fuerzas de reacción sobre el cuerpo, que son los vectores deslizantes necesarios para mantener el equilibrio.
Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio estático (es decir, ni se traslade ni rote), las fuerzas de reacción de los soportes deben satisfacer las siguientes condiciones generales:

1. Equilibrio de Traslación
La suma vectorial de todas las fuerzas externas $\vec{F}^{(ext)}$ y todas las fuerzas de reacción $\vec{F}^{(reac)}$ debe ser cero. Esto garantiza que el centro de masa del cuerpo no se acelere (segunda ecuación en 3.33 debe ser cero). Matemáticamente, esto es una forma de la segunda ley de Newton (ecuación 3.40 igual a cero), donde la reacción de un soporte también es una fuerza estrictamente externa al cuerpo analizado. Esto es:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}^{(ext)} + \sum \vec{F}^{(reac)} = \vec{0} \tag{9.4}$$

Como muestra la ecuación 3.39, las fuerzas internas se cancelan para un sistema de muchas partículas (o para un material rígido si consideramos el caso continuo), lo que refuerza que las reacciones son fuerzas que se pueden considerar como externas.

2. Equilibrio de momentos (torques) El momento de un vector deslizante respecto a un punto O es una medida de su capacidad para producir rotación alrededor de ese punto. De forma análoga a la ecuación 9.4, podemos separar el torque en externos y externos reactivos, lo que mantiene la segunda condición:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\tau} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}^{(ext)} + \sum \vec{M}^{reac} = \vec{0}} \tag{9.5}$$

Donde $\vec{M}$ es el momento (torque).

9.2. Campo de momentos

Este campo corresponde a una representación de todos los momentos (torques) producidos por un sistema de vectores deslizantes respecto a todos los puntos del espacio. En otras palabras, para cada punto P del sólido o del espacio, existe un momento $\vec{M}_P$ debido a las fuerzas aplicadas, y el conjunto de todos estos momentos forma el campo de momentos. Este concepto permite describir cómo varía el efecto rotacional de un sistema de fuerzas dependiendo del punto de referencia elegido.
Este campo es importante porque cuando se cambia el punto de referencia de O a P, la fuerza resultante $\vec{R}$ no cambia (la traslación es la misma), pero el momento resultante sí

puede cambiar. El campo de momentos nos permite calcular el nuevo momento $\vec{M}_P^R$ sin tener que recalcular el producto cruz para cada fuerza individual con respecto al nuevo punto P. Solo se necesita saber el momento en un punto de referencia inicial O y la fuerza resultante $\vec{R}$.
Consideremos la definición de momento resultante para un único punto P (ecuación 9.3):

$$\vec{M}_P^R = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_P \times \vec{F}_i = \vec{r}_P \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{r}_P \times \vec{R} \tag{9.6}$$

Donde hemos usado la definición de fuerza resultante mostrada en la ecuación 9.2.
Si tenemos que $\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{r}_{PO}$, al reemplazar tenemos:

$$\vec{M}_P^R = \vec{r}_P \times \vec{R} = (\vec{r}_O + \vec{r}_{PO}) \times \vec{R} = \vec{r}_O \times \vec{R} + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} \tag{9.7}$$

Aquí notamos que el primer término de la derecha corresponde al momento resultante $\vec{M}_0^R$ en el punto de referencia O. Esto nos permite escribir:

$$\boxed{\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R + \vec{r}_{PO} \times \vec{R}} \tag{9.8}$$

Donde $\vec{M}_P^R$ es el momento resultante respecto a un punto P y $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_P - \vec{r}_O$ es el vector que va del nuevo punto P al punto original O. Este resultado es relevante ya que el campo de momentos se rige por una única fórmula vectorial que relaciona el momento resultante en un punto P con el momento resultante en un punto O.
Esto se puede observar en la Figura 9.2. En la sección a se muestra la rotación $\vec{M}_P^R$ generada por la fuerza resultante $\vec{R}$. Por suma de vectores, $\vec{r}_p$ (vector azul opaco) es igual a $\vec{r}_0$ (vector azul) sumado a $\vec{r}_{P0}$ (vector morado) como muestra la Figura 9.2. No obstante, podemos descomponere este giro en dos contribuciones. La primera es como si el vector $\vec{R}$ actuara sobre $\vec{r}_0$, lo que genera un pequeño giro en el sentido horario $\vec{M}_0^R$. La segunda contribución es derechamente el producto vectorial $\vec{r}_{P0} \times \vec{R}$, el cual da un gran vector antihorario. En c podemos ver de forma esquemática que, si sumamos los giros del apartado b, debemos obtener el giro inicial dado por $\vec{M}_P^R$.

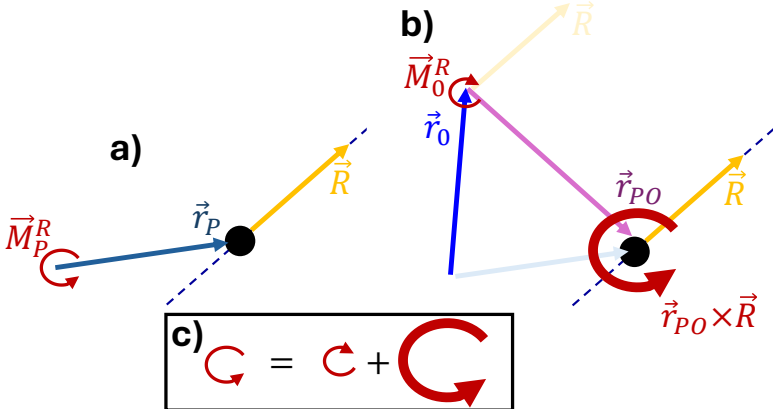


Figura 9.2: Representación de la ecuación 9.8.

En el caso en el que no existan fuerzas resultantes (hay pares de fuerzas que se anulan), los momentos resultantes en ambos puntos son iguales ($\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R$). También, cuando desplazamos el punto de referencia a lo largo de la dirección de la fuerza resultante, el momento no cambia. Se vuelve a dar la situación $\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R$. Este es un resultado muy importante, ya que el momento es invariante a lo largo de la línea de acción de la fuerza resultante. Esto es justamente lo que define la línea de acción de un vector deslizante: la dirección a lo largo de la cual podemos mover el punto de aplicación sin cambiar el momento respecto a ningún punto.

Ejercicio resuelto
Un sistema de fuerzas aplicado a un sólido rígido ha sido reducido a una fuerza resultante: $\vec{R} = (6, 4, 0)\, N$ y un momento resultante respecto a un punto O: $\vec{M}_0^R = (0, 0, 8)\, Nm$. Se pide calcular el momento $\vec{M}_P^R$ respecto al punto $P = (2, 1, 0)\, m$.

R: Del enunciado tenemos que el vector $\vec{r}_P$ es el del punto P. No obstante, no nos indica cuál es la posición del vector $\vec{r}_O$, por lo que asumiremos que este es el origen (0,0,0) m. Esto nos deja con $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_P = (2, 1, 0)\, m$. Ahora, debemos calcular el producto cruz $\vec{r}_{PO} \times \vec{R}$. Usando la definición de producto cruz (ecuación 2.57), tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{PO} \times \vec{R} &= [r_y R_z - r_z R_y]\hat{i} - [r_x R_z - r_z R_x]\hat{j} + [r_x R_y - r_y R_x]\hat{k} \\ &= [(1)(0) - (0)(4)]\hat{i} - [(2)(0) - (0)(6)]\hat{j} + [(2)(4) - (1)(6)]\hat{k}\, Nm = 2\, Nm\, \hat{k} \end{aligned} \tag{9.9}$$

Esto se puede corroborar al notar que el producto vectorial es perpendicular a ambos vectores iniciales. En este caso, ambos vectores están en el plano xy, lo que significa que el resultado debe ser perpendicular a este plano, lo que es el eje z. Ahora, al aplicar la ecuación 9.8:

$$\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} = 8\hat{k} + 2\hat{k}\, Nm = 10\, Nm\, \hat{k} \tag{9.10}$$

9.3. Los Invariantes del Sistema de Fuerzas

Los invariantes son magnitudes escalares (números) calculados a partir del sistema de fuerzas resultantes $\vec{R}$ y $\vec{M}^R$ que no cambian de valor sin importar qué punto de referencia P se elija para calcular el momento resultante $\vec{M}_P^R$. Esto es muy útil, porque nos permite caracterizar sistemas de fuerzas independientemente de dónde se apliquen.
Para notar esto, apliquemos el producto punto entre la ecuación 9.8 y la fuerza resultante $\vec{R}$:

$$\vec{M}_P^R \cdot \vec{R} = (\vec{M}_0^R + \vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_0^R \cdot \vec{R} + (\vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} \tag{9.11}$$

Ahora, notamos que el producto cruz entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es perpendicular a ambos. Es decir, si tenemos que $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{C} \perp \vec{A}$ y $\vec{C} \perp \vec{B}$. Si realizamos el producto punto de $\vec{C}$ con el vector $\vec{A}$ o el vector $\vec{B}$ tendremos que es cero ya que, por definición, el producto punto

entre vectores perpendiculares es cero. Esto implica que el término $(\vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$ es igual a cero. Esto nos deja la relación:

$$\boxed{\vec{M}_P^R \cdot \vec{R} = \vec{M}_0^R \cdot \vec{R} = I_E = \vec{M}^R \cdot \vec{R} = \text{Invariante Escalar}} \tag{9.12}$$

Este escalar I_E se llama invariante de un sistema de vectores deslizantes y representa la componente del momento resultante $\vec{M}^R$ que es paralela a la fuerza resultante $\vec{R}$.

9.3.1. Eje central

El eje central corresponde al conjunto de puntos P tales que $\vec{M}_P^R$ es paralelo a $\vec{R}$. En términos de vectores, dos cantidades vectoriales son paralelas cuando el producto cruz entre ellas es igual a cero. Por lo tanto, la condición de eje central se obtiene cuando:

$$\vec{M}_P^R \times \vec{R} = \vec{0} \tag{9.13}$$

Es decir, un eje central es definido como aquella recta donde tanto las fuerzas resultantes como los momentos son paralelos entre sí. Esto se puede ver en la Figura 9.3

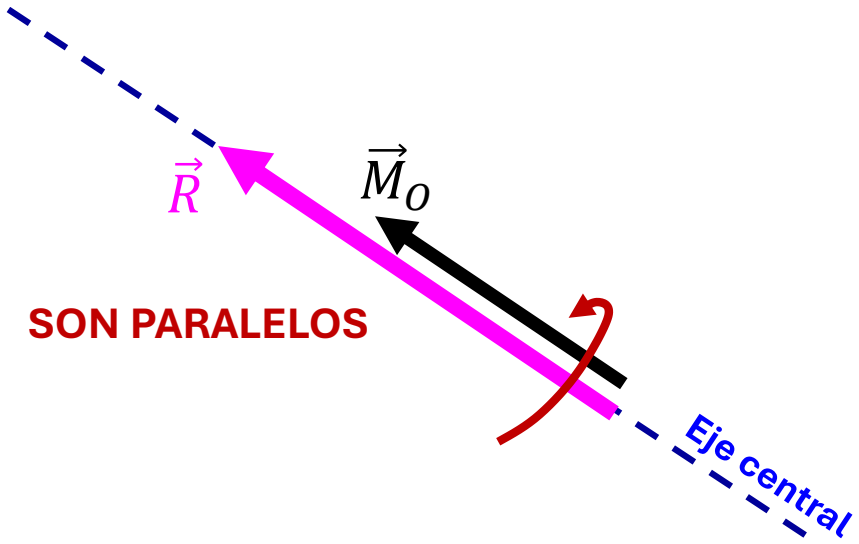


Figura 9.3: Condición necesaria para considerar un eje como .ejeparalelo": tanto el momento como la resultante deben ser paralelas entre si.

Aplicando esta condición a la ecuación 9.8 tenemos:

$$(\vec{M}_0^R + \vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{M}_0^R \times \vec{R} + (\vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{0} \tag{9.14}$$

Usando la misma identidad aplicada a la ecuación 2.54 ($(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$), tenemos que el último término de la ecuación 9.14 es:

$$(\vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{R}(\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R}) - \vec{r}_{PO}(\vec{R} \cdot \vec{R}) = \vec{R}(\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R}) - \vec{r}_{PO}R^2 \tag{9.15}$$

Esto en la ecuación 9.14 es:

$$\begin{aligned}\vec{M}_0^R \times \vec{R} + (\vec{r}_{PO} \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{M}_0^R \times \vec{R} + \vec{R}(\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R}) - \vec{r}_{PO}R^2 = \vec{0} \\ \implies \vec{M}_0^R \times \vec{R} = \vec{r}_{PO}R^2 - \vec{R}(\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R})\end{aligned} \tag{9.16}$$

Ahora descomponemos el vector $\vec{r}_{PO}$ en su parte paralela y perpendicular a $\vec{R}$. Esto es: $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$. Por definición, el producto punto entre la parte perpendicular $\vec{R}$ es cero. Adicionalmente, si $\vec{r}_{||}$ es paralelo a $\vec{R}$, se puede escribir como $\vec{r}_{||} = \alpha\vec{R}$. Con esto, el producto punto sería:

$$\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R} = (\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}) \cdot \vec{R} = \vec{r}_{||} \cdot \vec{R} + \vec{r}_{\perp} \cdot \vec{R} = \vec{r}_{||} \cdot \vec{R} = \alpha\vec{R} \cdot \vec{R} = \alpha R^2 \tag{9.17}$$

También podemos realizar esta descomposición para el término $\vec{r}_{PO}R^2$:

$$\vec{r}_{PO}R^2 = (\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp})R^2 \tag{9.18}$$

Sustituyendo 9.17 y 9.18 en la ecuación 9.16:

$$\vec{M}_0^R \times \vec{R} = \vec{r}_{PO}R^2 - \vec{R}(\vec{r}_{PO} \cdot \vec{R}) = (\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp})R^2 - \vec{R}\alpha R^2 = R^2(\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp} - \alpha\vec{R}) \tag{9.19}$$

No obstante, habíamos señalado que $\vec{r}_{||} = \alpha\vec{R}$, lo que implica que:

$$\vec{M}_0^R \times \vec{R} = R^2(\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp} - \alpha\vec{R}) = R^2(\alpha\vec{R} + \vec{r}_{\perp} - \alpha\vec{R}) = R^2\vec{r}_{\perp} \tag{9.20}$$

Luego, la componente paralela se anula, lo que hace que sea irrelevante para la dinámica de cuerpo rígido, como muestra la condición dada por la ecuación 9.13. Esta condición implica que solo hay componente perpendicular, la cual se obtiene despejando la ecuación 9.20:

$$\boxed{\vec{r}_{\perp} = \frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2}} \tag{9.21}$$

Ahora bien, esta es la parte perpendicular de $\vec{r}_{PO}$. Si $\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$, donde $\vec{r}_{\perp}$ está dado por 9.21, podemos escribir el vector $\vec{r}_{PO}$ como:

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp} = \vec{r}_{||} + \frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2} \tag{9.22}$$

Sin embargo, la parte paralela $\vec{r}_{||}$ fue descrita como proporcional a la fuerza resultante $\vec{R}$, por lo que $\vec{r}_{PO}$ se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{r}_{PO} = t\vec{R} + \frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2}} \tag{9.23}$$

donde t es un parámetro real. Esta expresión es la ecuación vectorial de la recta que define el eje central asociado al sistema de vectores deslizantes. Es decir, que a medida que se van

cambiando los valores de t se irán generando diferentes puntos en el espacio. Estos puntos, al unirse todos, forman la recta donde se cumple la condición de eje central. Para efectos prácticos de ejercicios, basta con darse al menos tres valores diferentes de t. El primero es t igual a cero, que deja solo la contribución $\frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2}$. Los otros valores son los de t igual a 1 y menos 1, lo que significa que le estamos sumando (y restando) directamente la contribución de la fuerza resultante $\vec{R}$.

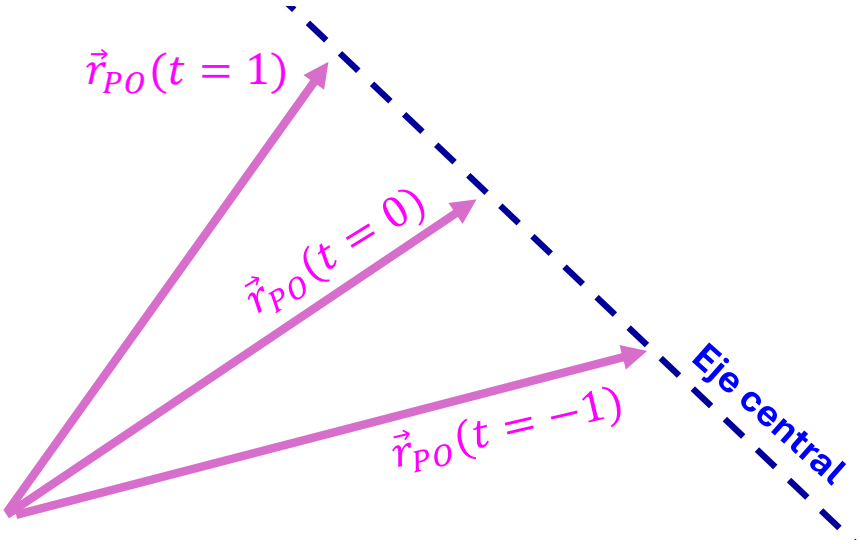


Figura 9.4: La ecuación 9.23 significa que para diferentes valores de t de puede definir un punto que va a lo largo de la recta formada por el eje central.

Ejercicio resuelto
Imaginemos que estás usando un destornillador para atornillar un tornillo en una tabla de madera. El sistema de fuerzas que aplicas con tu mano se reduce a dos efectos netos en cualquier punto: La fuerza de empuje que haces para que el tornillo avance (fuerza resultante $\vec{R}$) y el torque que aplicas para que el tornillo gire (momento resultante $\vec{M}^R$ respecto a un punto O, que puede ser el extremo de la punta en el eje del tornillo). Encontremos el eje central si $\vec{R} = 50\,N\,\hat{k}$ y $\vec{M}^R = (10\hat{i} + 20\hat{j})\,Nm$.

R: Primero buscamos el valor de R^2, el cual es $R^2 = 0^2 + 0^2 + 50^2\,N^2 = 2500\,N^2$. Luego, aplicamos el producto cruz definido por la ecuación 2.57

$$\begin{aligned} \vec{M}_0^R \times \vec{R} &= (M_y R_z - M_z R_y)\hat{i} - (M_x R_z - M_z R_x)\hat{j} + (M_x R_y - M_y R_x)\hat{k} \\ &= (20 * 50 - 0 * 0)\hat{i} - (10 * 50 - 0 * 0)\hat{j} + (10 * 0 - 0 * 0)\hat{k} = 1000\hat{i} - 500\hat{j}\,N^2 m \end{aligned} \tag{9.24}$$

Dividiendo por R^2, tenemos:

$$\frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2} = \frac{1000\hat{i} - 500\hat{j}\,N^2 m}{2500\,N^2} = 0.4\hat{i} - 0.2\hat{j}\,m \tag{9.25}$$

Luego, la recta es:

$$\vec{r}_{PO} = (0, 0, 50)t + (0.4, -0.2, 0)\, m \tag{9.26}$$

Esto significa que el eje central es una recta paralela al eje z. Entonces, para $t = 0$, el eje central pasa por el plano xy, permitiendo definir el vector $\vec{r}_O = (0.4, -0.2, 0)\, m$.

9.4. Equivalencia de sistemas

Dos sistemas de vectores deslizantes se dicen equivalentes si producen el mismo efecto mecánico sobre un cuerpo rígido: es decir, generan la misma resultante y el mismo momento resultante respecto a cualquier punto.
Si consideramos el ejemplo anterior del destornillador para girar un tornillo, se aplican fuerzas en distintos puntos y direcciones en su uso. No obstante, esto es equivalente a aplicar una única fuerza resultante a lo largo de una línea específica (eje central) más un momento o par equivalente. Por lo tanto, este principio permite diseñar herramientas, estructuras o mecanismos con cargas equivalentes más simples de analizar. Luego, este proceso conduce a la simplificación, o reducción, del sistema. Matemáticamente, esto es tener dos sistemas de vectores deslizantes $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$ y $\{\vec{F}'_i, \vec{r}'_i\}$, los cuales serían equivalentes si $\vec{R} = \vec{R}'$ y $\vec{M} = \vec{M}'_O$ para cualquier punto O. Esto asegura que la acción mecánica sobre cualquier cuerpo rígido es la misma.

9.4.1. Reducción y reducción canónica

La reducción consiste en reemplazar un sistema complejo de fuerzas por un sistema más simple que sea equivalente. Es decir, si tenemos un conjunto $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$, el sistema queda determinado por el par de vectores $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$. Esto es:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \qquad \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \tag{9.27}$$

Note que la diferencia con las ecuaciones 9.2 y, sobre todo, 9.3 radica en que las condiciones dadas en 9.27 son generales y describen a todo el sistema, mientras que $\vec{M}_O^R$ depende del punto P en el que se aplique la resultante $\vec{R}$.
Por otro lado, la **reducción canónica** (o torsor) es la forma más simple posible a la que se puede reducir un sistema de fuerzas. Consiste en trasladar la Fuerza Resultante $\vec{R}$ a una línea específica en el espacio (eje central), de tal manera que el momento resultante ($\vec{M}^R$) sea paralelo a $\vec{R}$. Para entender esto, reemplacemos la ecuación 9.23 en 9.8:

$$\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} = \vec{M}_0^R + \left(t\vec{R} + \frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2} \right) \times \vec{R} = \vec{M}_0^R + \left(\frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2} \right) \times \vec{R} \tag{9.28}$$

donde $\vec{R} \times \vec{R}$ es nulo (vectores paralelos se anulan cuando se multiplican con el producto cruz). Usando la identidad $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$, tenemos que el segundo término es:

$$(\vec{M}_0^R \times \vec{R}) \times \vec{R} = \vec{R}(\vec{M}_0^R \cdot \vec{R}) - \vec{M}_0^R R^2 \tag{9.29}$$

Reemplazando en 9.28:

$$\vec{M}_P^R = \vec{M}_0^R + \left(\frac{\vec{M}_0^R \times \vec{R}}{R^2} \right) \times \vec{R} = \vec{M}_0^R + \frac{\vec{R}(\vec{M}_0^R \cdot \vec{R}) - \vec{M}_0^R R^2}{R^2} = \vec{M}_0^R + \frac{\vec{R}(\vec{M}_0^R \cdot \vec{R})}{R^2} - \vec{M}_0^R$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{M}_{||} = \vec{M}_P^R = \frac{\vec{R}(\vec{M}_0^R \cdot \vec{R})}{R^2}} \tag{9.30}$$

Para hacer notar aún más que el momento es paralelo a la resultante, tomemos $\lambda = \frac{\vec{M}_0^R \cdot \vec{R}}{R^2}$. Esto nos queda:

$$\vec{M}_{||} = \lambda \vec{R} \tag{9.31}$$

Lo que demuestra que los momentos son paralelos a las resultantes debido a que λ es un escalar (un número). Esto es conocido como momento canónico, ya que el momento ahora no depende del punto P (porque todos los puntos del eje central dan el mismo $\vec{M}_P^R$).
Por otro lado, la definición general del momento canónico es la parte del momento que permanece invariante y paralela a la resultante. Por lo tanto, el momento canónico siempre puede escribirse en función del invariante escalar I_E (parte paralela del momento que no cambia). Esto es $I_E = \vec{M}_O^R \cdot \vec{R}$. Luego, la ecuación 9.30 puede escribirse como:

$$\vec{M}_{||} = \frac{I_E}{R^2} \vec{R} \tag{9.32}$$

Esto nos permite interpretar I_E de otra manera, pues es una constante de proporcionalidad entre el momento canónico y la resultante. En este nuevo resultado I_E mide cuánto del momento total está alineado con la resultante.
En el caso en el que el **invariante escalar** sea **nulo**, la ecuación del invariante escalar (ecuación 9.12) es igual a cero ($I_E = 0$). Este caso implica que $\vec{M}$ y $\vec{R}$ son perpendiculares entre sí (razón por la cual su producto punto es cero) y $\vec{M}_{||} = \vec{0}$ (no existe momento canónico). Dicho de otra forma, los momentos relativos se cancelan en la dirección de la resultante.

Ejercicio resuelto
Una barra rígida de 2 m de longitud está situada en el espacio con sus extremos en los puntos $\vec{r}_A = (0, 0, 0)\, m$ y $\vec{r}_B = (2, 0, 0)\, m$. Se aplican dos fuerzas: $\vec{F}_1 = (0, 10, 0)\, N$ en A y $\vec{F}_2 = (0, -10, 0)\, N$ aplicada en B. Calcular el invariante escalar y el momento canónico. Añadir una fuerza $\vec{F}_3 = (0, 0, 30)\, N$ en el punto $\vec{r}_C = (1, 0, 0)\, m$ para romper el par puro y volver a encontrar el invariante escalar y el momento canónico.

R: Primero calculamos la fuerza resultante que se define por la suma de la ecuación 9.2. Para este caso, la resultante es:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F_i} = (0, 10, 0) + (0, -10, 0) = (0, 0, 0)\, N \tag{9.33}$$

Esto quiere decir que el sistema es un 'par puro', lo que significa que la fuerza neta de traslación es cero, pero la tendencia neta de rotación no lo es. Este es un **caso particular**. En el caso en que tanto el momento como la resultante sean cero, hablamos de un caso particular de equilibrio estático.
Ahora, calculemos los momentos (ecuacion 9.3):

$$\vec{M}_0^R = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \vec{r}_B \times \vec{F}_2 \tag{9.34}$$

Esto porque $\vec{r}_A$ es el vector nulo. Usando la ecuación 2.57 del producto punto:

$$\begin{aligned} \vec{r}_B \times \vec{F}_2 &= (r_{By}F_z - r_{Bz}F_y)\hat{i} - (r_{Bx}F_z - r_{Bz}F_x)\hat{j} + (r_{Bx}F_y - r_{By}F_x)\hat{k} \\ &= 2(-10)\hat{k}\, N \cdot m = (0, 0, -20)\, N \cdot m \end{aligned} \tag{9.35}$$

Como el invariante escalar y el momento canónico se definen como proporcionales a la resultante $\vec{R}$ (ecuaciones 9.12 y 9.30-9.32), y esta es cero, tenemos que ambas cantidades son cero.
Luego, el enunciado nos indica que hay una nueva fuerza para romper el par que anula la resultante de traslación (fuerza $\vec{F_3}$). Esto significa que $\vec{R} = \vec{F_3} = (0, 0, 30)\, N$. Luego, al momento se le suma la contribución de esta fuerza:

$$\vec{r}_C \times \vec{F}_3 = -(r_{Cx}F_z)\hat{j} = -30\hat{j}\, N \cdot m = (0, -30, 0)\, N \cdot m \tag{9.36}$$

Luego, el momento es:

$$\vec{M}_0^R = (0, -30, -20)\, N \cdot m \tag{9.37}$$

Con este momento y resultante no nulo, podemos calcular la invariante escalar:

$$I_E = \vec{M}_O^R \cdot \vec{R} = (0, -30, -20) \cdot (0, 0, 30)\, N^2 \cdot m = (-20)(30)\, N^2 \cdot m = -600\, N^2 \cdot m \tag{9.38}$$

Con esto podemos calcular el momento canónico usando la ecuación 9.32:

$$\vec{M}_{||} = \frac{I_E}{R^2}\vec{R} = \frac{-600\, N^2 \cdot m}{30^2\, N^2}(0, 0, 30)\, N = (0, 0, -20)\, N \cdot m \tag{9.39}$$

Este resultado revela que cuando el invariante escalar es diferente de cero, existe momento canónico proporcional a la resultante.

9.5. Movimientos planos

El movimiento plano corresponde a un caso particular de movimientos de sólidos. Este se basa en que tanto las velocidades lineales, las aceleraciones y los desplazamientos ocurren en un plano. Si consideramos un movimiento rotatorio definido por la ecuación 2.56 ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), tenemos que esa velocidad puede tener componentes tanto en $\hat{i}, \hat{j}$ y en $\hat{k}$. Si definimos un plano por medio de un vector normal $\hat{k}$, un movimiento plano no puede tener componente $\hat{k}$. Esto implica que la condición necesaria para que un movimiento sea plano debe ser:

$$\boxed{(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \hat{k} = 0} \tag{9.40}$$

Cuando tenemos objetos más complejos, pero que siguen teniendo una velocidad y aceleración del centro de masa paralelas al plano $\hat{k}$, ocurren fenómenos como el çentro instantáneo de rotación"(CIR). Esto se puede ver en la Figura 9.5. Este representa el giro de una rueda indicando el punto azul que es el punto que esté en contacto con la superficie. Como este punto de la rueda cambia en el tiempo (es decir, que otros puntos de la rueda están en contacto con la superficie en otros tiempos), y que además es el punto por el cual el resto rota con velocidades diferentes, este punto podemos llamerle eje instantáneo de rotación.

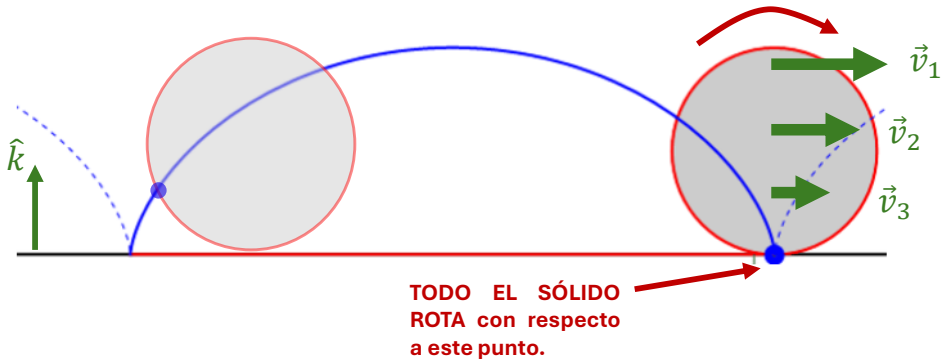


Figura 9.5: El punto azul se desplaza siguiendo la trayectoria azul. En el instante en el que el punto azul está en contacto con el suelo, todo el sólido gira con respecto al punto azul.

Por otro lado, la descripción general de los movimientos planos indica que, además de rotaciones, también pueden existir traslaciones en dicho plano. Por ejemplo, la velocidad de traslación es de la forma $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$. Con esto, la velocidad del movimiento plano queda dada por:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA} \tag{9.41}$$

El primer término de la derecha representa la traslación mientras que el segundo representa la rotación del sistema o punto B. Aquí es importante tener en cuenta que la posición $\vec{r}_{BA}$ es el

vector que determina la posición de B con respecto al punto A. Mientras tanto, la velocidad angular $\vec{\omega}_{BA}$ corresponde al giro generado en el punto B con respecto al eje que pasa por el punto A.

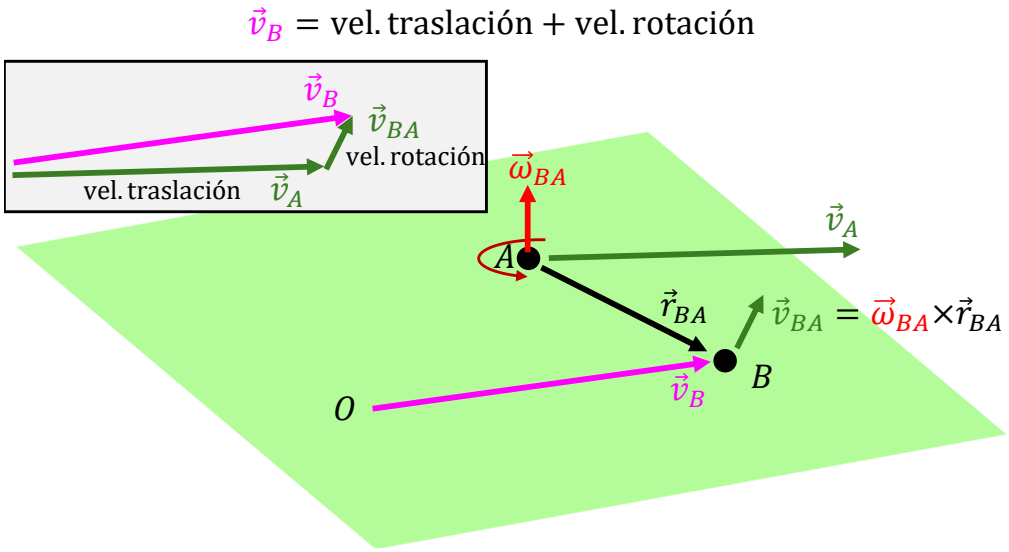


Figura 9.6: En un plano, la velocidad de un punto B queda determinado por su velocidad de rotación $\vec{v}_{BA}$ (velocidad en B con respecto a A) más la velocidad de traslación del sistema A. El recuadro indica como se realiza la operación por medio de la suma de vectores velocidad.

Ejercicio resuelto
Una barra rígida AB, de longitud 0.5 m, se mueve en un plano horizontal. En un instante determinado, el punto A tiene una velocidad de 3 m/s hacia la derecha, mientras que la barra gira en sentido antihorario con una velocidad angular de 4 rad/s. Sabiendo que en ese instante la barra se encuentra en posición horizontal, determine:
1. El vector velocidad del punto B.
2. El módulo de la velocidad de B.

R: Aquí usamos la ecuación del movimiento plano 9.41. Al ser un movimiento en el sentido antihorario, podemos definir $\vec{\omega}_{BA} = \omega_{AB}\hat{k}$. De la misma forma, la velocidad del punto A es $\vec{v}_A = v_A\hat{i}$. La barra, al estar en una posición horizontal, significa que solo tiene componente $\hat{i}$, lo que implica que $\vec{r}_{BA} = r_{BA}\hat{i}$. Con esto, podemos escribir la ecuación como:

$$\vec{v}_B = v_A\hat{i} + \omega_{AB}\hat{k} \times r_{BA}\hat{i} \tag{9.42}$$

El producto vectorial entre $\hat{k}$ y $\hat{i}$ es $\hat{j}$, por lo que nos queda:

$$\vec{v}_B = v_A\hat{i} + \omega_{AB}r_{BA}\hat{j} \tag{9.43}$$

Reemplazando los valores del enunciado, finalmente tenemos:

$$\vec{v}_B = 3\hat{i} + 2\hat{j} \ \text{ m/s} \tag{9.44}$$

Adicionalmente, el módulo es aproximadamente 3.6 m/s, el cual es mayor a la velocidad del punto A.

Capítulo 10

Dinámica de cuerpos rígidos

El capítulo previo nos permitió responder a la pregunta: '¿Qué fuerzas causan el movimiento de este cuerpo?' La respuesta fue simplificar cualquier colección de fuerzas en un sistema único y determinamos las condiciones para el equilibrio estático. No obstante, el foco estuvo en la fuerza y el torque como agentes causales de la traslación y la rotación. Para predecir cómo un cuerpo realmente se moverá o rotará, o cuánta energía requerirá cambiar su estado de movimiento, necesitamos una nueva variable que describa la distribución de su masa.

La dinámica de cuerpos rígidos es la rama de la mecánica que estudia el movimiento (rotación y traslación) de objetos que no se deforman. Es decir, que este capitulo se separa del anterior porque movemos el foco de las propiedades externas (fuerzas) a las propiedades internas y geométricas del cuerpo mismo. También, a diferencia de la dinámica de partículas, donde el movimiento de un objeto se puede describir con un solo punto, la dinámica de cuerpos rígidos debe considerar cómo la masa se distribuye en el espacio. Esencialmente, un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuya distancia relativa no cambia, sin importar las fuerzas externas aplicadas, matemáticamente se puede escribir así:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{Constante}, \quad \forall\, i,\, j \tag{10.1}$$

A pesar de ser una condición importante, esta ecuación no es suficiente para describir la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. El momento de inercia aparece porque queremos algo cuantitativo: medir la resistencia a cambios de movimiento angular, exactamente como la masa cuantifica la resistencia a cambios de velocidad lineal. Sino que además requiere de otros conceptos.

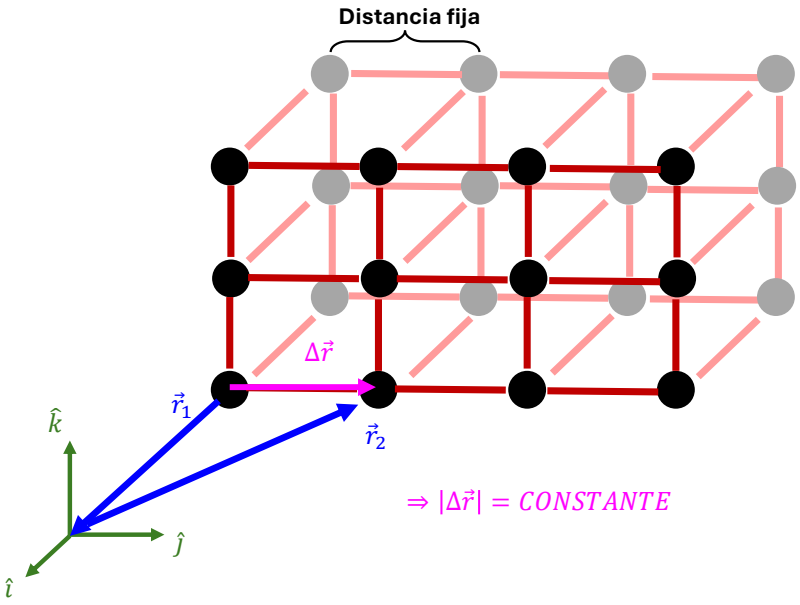


Figura 10.1: La condición de sólido ríffido indica que la distancia entre las moléculas que constituyen el sólido permanecen separados por distancias que no cambian en el tiempo. En el caso en el que las partículas puedan oscilar, tendrán una velocidad promedio que será interpretada como proporcional a la temperatura. Sin embargo, la condición de sólido rígido impide esa oscilación y, por tanto, no hablamos de temperatura en estas secciones.

Debido a que esto impone una restricción al movimiento de las partículas, podemos describir un sólido como aquel que tiene restricciones o ligaduras. Una propiedad intrínseca de un sólido es la capacidad de tener superficies. Todo solido está caracterizado por una última capa de moléculas que describen su límite exterior. Ahora, la cantidad mínima necesaria para describir una superficie se puede establecer por medio de 3 puntos. Si fueran dos puntos, no se puede definir una superficie, por lo que la cantidad mínima son 3 puntos. Ahora, estos tres puntos no pueden separarse, por lo que tenemos 3 condiciones o restricciones. Como cada partícula se puede describir con 3 coordenadas (x, y, x) tenemos que esta condición de superficie se alcanza con 9 coordenadas. No obstante, podemos incorporar las restricciones bajo el concepto de *grados de libertad*, lo cual nos quedaría:

$$\text{Grados de libertad} = \text{Coordenadas - restricciones} \tag{10.2}$$

Para el caso que estamos describiendo esto sería:

$$\text{Grados de libertad} = 9 - 3 = 6 \tag{10.3}$$

Un aspecto central sobre esta descripción es que corresponde a una caracterización microscópica de un sólido. Es decir, necesitamos definirlo por medio de sus constituyentes más pequeños para poder definir sus grados de libertad. Adicionalmente existe otra definición

que nos permite obtener los grados de libertad. Primero debemos tener en mente la capacidad de un sólido para trasladarse. Este se puede mover idealmente tanto hacia arriba-abajo, derecha-izquierda y adentro-afuera. Esto significa que hay tres ejer por los que un sólido se puede desplazar. Adicionalmente, un sólido también puede rotar con respecto a tres ejes, como muestra la Figura 10.2.

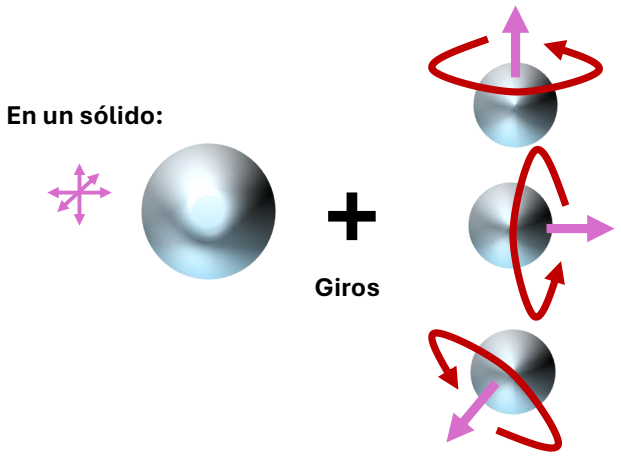


Figura 10.2: Grados de libertad de un sólido rígido en función de los movimientos posibles que puede tener: 3 de traslación y 3 de rotación.

Por lo tanto, un sólido tiene los tres grados de libertad debido a la traslación espacial sumado a los tres grados de libertad debido a las rotaciones independiente. Es decir, que se tienen 6 grados de libertad. Los mismos que se obtienen por la definición de partícula de un sólido.
Ahora, si un sólido no puede desplazarse por un eje, diremos que existe una ligadura. Por ejemplo, si el sólido se encuentra sobre una mesa, no puede desplazarse por la componente vertical, lo cual le restringe un grado de libertad. Si, además, le restringe las rotaciones donde hayan partes del sólido subiendo, se generan dos restricciones de giro adicionales. Por lo tanto, imponer una restricción vertical podría reducir los grados de libertad a 3 movimientos: dos de traslación y uno de rotación. De esta forma, podemos establecer la siguiente ecuación para los grados de libertad cuando consideramos un sólido rígido macroscópico:

$$\text{Grados de libertad} = \text{N. de mov. independientes - N. de ligaduras} \tag{10.4}$$

10.1. Momento de inercia

Para entender el momento de inercia, se puede establecer una analogía con conceptos más simples, como la masa de un objeto. Para un movimiento de traslación (lineal), la masa mide la resistencia a la aceleración lineal. Una masa grande es más difícil de acelerar que

una masa pequeña, incluso con la misma fuerza. De manera análoga, para un movimiento de rotación, el **momento de inercia mide la resistencia a la aceleración angular** (la aceleración angular se define como el cambio de velocidad angular en el tiempo, como muestra la ecuación 2.41). Un objeto con un gran momento de inercia es más difícil de rotar que uno con un momento de inercia pequeño, incluso con el mismo par de torsión.
Calculemos la energía cinética de una partícula. Esta es la ecuación 5.4 $K = \frac{1}{2}mv^2$. Sin embargo, para una rotación, la velocidad puede escribirse como $v = r\omega$ (ecuación 2.39). Reemplazando, tenemos que la energía cinética de un cuerpo rotante es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 \tag{10.5}$$

Para preservar la forma de la energía cinética lineal, se puede reescribir como:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2} \tag{10.6}$$

donde se define:

$$\boxed{I = mr^2} \tag{10.7}$$

Es justamente esta cantidad I la que llamamos *momento de inercia* , y dada la forma que tiene la ecuación de la energía cinética, se observa cómo cumple un rol análogo al de la masa m para una partícula. Para un sistema de partículas, el momento de inercia es la suma de las masas multiplicadas por el cuadrado de sus distancias:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{10.8}$$

Mientras que para el caso de un cuerpo rígido, tenemos que el momento de inercia se calcula como:

$$\boxed{I = \int_V r^2 dm} \tag{10.9}$$

donde r es la distancia perpendicular desde cada elemento de masa dm al eje de rotación.
Ahora, el factor r^2 en la definición del momento de inercia es crucial porque una pequeña cantidad de masa ubicada lejos del eje de rotación contribuye mucho más al momento de inercia que una masa más grande ubicada cerca del eje. Por ejemplo, si se duplica la distancia de una masa al eje de rotación, su momento de inercia aumenta por un factor de cuatro ($2^2 = 4$). Note que, si un material tiene algún agujero, por ejemplo, el momento de inercia no se suma, sino que se resta la cantidad de inercia que debería corresponder a ese hueco.

Ejercicio resuelto
Calculemos el momento de inercia de un cilindro sólido uniforme de masa M y radio R respecto a su eje central (el eje que pasa por el centro y es paralelo a la altura del cilindro como muestra la Figura 10.3).

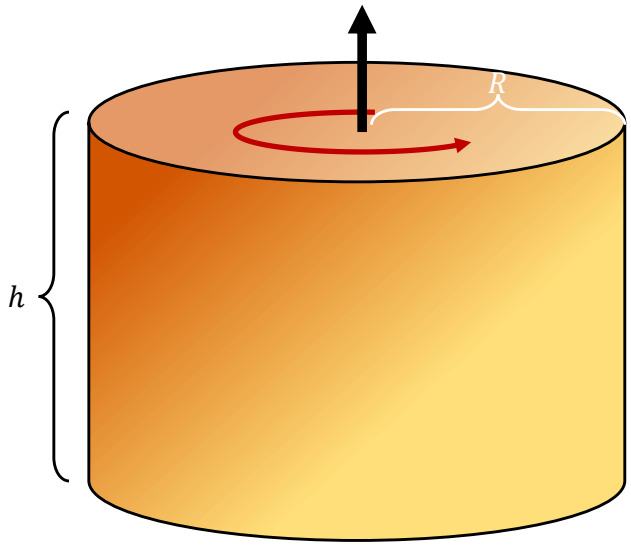


Figura 10.3: Cilindro rotando con respecto al eje indicado por la flecha negra.

R: Aquí asumiremos que el cilindro tiene una altura con un valor h conocido. Para calcular el elemento de masa, podemos hacerlo usando la definición de densidad $\rho = m/V$ ya que nos dan información geométrica en el enunciado. Al ser uniforme y con masa M, se sigue que la densidad es constante $\rho \to \rho_0$. Por lo tanto, el elemento de masa, para un objeto uniforme es $dm = \rho_0 dV = \frac{M}{V} dV$. Para encontrar esa densidad, se puede escribir para todo el sistema considerando la masa total y el volumen total (que resulta en el mismo valor que si tomo una subregión del sólido): $\rho_0 = M/V = M/h\pi R^2$. Ahora, el volumen en coordenadas cilíndricas es $dV = rdrd\theta dz$ (ecuación 2.33). Con esto, el momento de inercia se transforma en:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho_0 dV = \rho_0 \int_V r^2 dV = \frac{M}{V} \int_V r^2 dV \tag{10.10}$$

Ahora, al separar el elemento de volumen dV en subelementos, hay que establecer dichos límites de integración. El elemento vertical dz va desde una altura cero hasta la altura h. El radial va desde el origen hasta el radio R mientras que el ángulo es una vuelta completa y, por tanto, va desde cero a 2π. Esto permite escribir la integral como:

$$\int_V r^2 dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2) r dr d\theta dz = \left(\int_0^h dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r^3 dr \right) \tag{10.11}$$

Note que aquí hemos separado las integrales, ya que las variables son independientes entre sí. Podría darse el caso en el que no lo sean, y por lo tanto, esta separación a priori no sería válida. Las dos primeras integrales son z y θ evaluadas en h y 2π, respectivamente, mientras que la tercera es $\frac{1}{4}R^4$. Luego, la integral es:

$$\int_V r^2 dV = 2\pi h \frac{1}{4} R^4 \tag{10.12}$$

Ahora, reemplazando en la ecuación de momento de inercia (ecuación 10.10), tenemos:

$$I = \frac{M}{V}\int_V r^2 dV = \frac{M}{V}\pi h\frac{1}{2}R^4 = \frac{M}{\pi R^2 h}\pi h\frac{1}{2}R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \tag{10.13}$$

10.2. Momento angular y torque con momento de inercia

Para una sola partícula de masa m que gira a una distancia r del eje, su momento angular es $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\vec{v})$ (ecuación 3.54). Tomando la misma relación para la velocidad tangencial en función del radio y la velocidad angular usada en la sección anterior (ecuación 2.39), podemos escribir el momento angular como:

$$\begin{aligned}\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = (r\hat{r})\times(mr\omega\hat{\theta}) = mr^2\omega\hat{k}\\ \Longrightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}\end{aligned} \tag{10.14}$$

donde nuevamente se ha definido $I = mr^2$, que es el momento de inercia. Esto muestra que el momento angular es proporcional al momento de inercia.

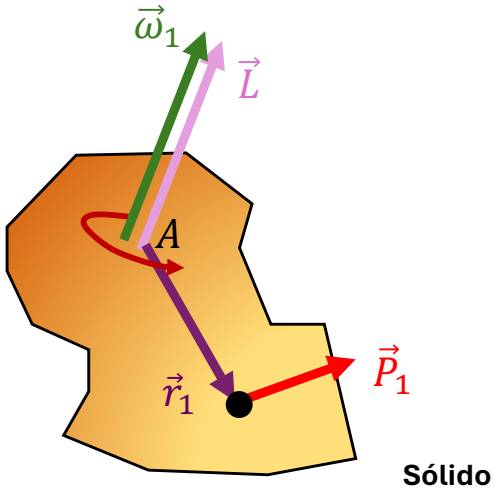


Figura 10.4: En su forma más simple, el momento de inercia puede describirse como la constante de proporcionalidad entre la velocidad angular *omẽga* y el momento angular $\vec{L}$. Esto significa que el momento de inercia se puede interpretar como la resistencia a rotar de un sólido.

Ahora, el torque se define como el cambio de momento angular en el tiempo (ecuación 3.56). Luego, aplicando esto a la ecuación 10.14:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}I\vec{\omega} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}} \tag{10.15}$$

donde hemos aplicado la definición de aceleración angular (ecuación 2.41). Note que el momento de inercia I no cambia porque el concepto de cuerpo rígido implica que la masa no se deforma ni se redistribuye durante la rotación. Por lo tanto, no puede cambiar en el tiempo. ¿En qué sistemas podría cambiar el momento de inercia? En un cuerpo que se deformara. Las distancias r_i de cada elemento del cuerpo cambiarían, y el momento de inercia ya no sería constante. Por ejemplo, un patinador de hielo que junta sus brazos cambia la distribución de su masa con respecto al eje de rotación, lo que cambia su momento de inercia.

Ejercicio resuelto
Un patinador (con su cuerpo) se modela como un cilindro sólido de masa M_c =50 kg y radio R=0.25 m. El patinador tiene además dos brazos (dos masas puntuales idénticas) de masa m_b =4 kg cada uno, inicialmente extendidos a una distancia r_1=0.90 m del eje de rotación (medida desde el eje central del cuerpo hasta la masa de cada brazo). El patinador parte girando con velocidad angular inicial $\omega_1 = 2\ rad/s$. Luego , los brazos se pliegan y quedan a una distancia r_2=0.30 m del eje. Suponemos que no hay torque externo neto (superficie de baja fricción), por lo que el momento angular total se conserva.
1. Calcula los momentos de inercia inicial y final I_1 y I_2.

R: El momento de inercia de un cilíndro se define como $I = \frac{1}{2}MR^2$ (ecuación 10.13), por lo tanto, el momento de inercia del cuerpo es:

$$I_c = \frac{1}{2}M_P R^2 = \frac{1}{2}(50\,kg)(0.25\ m)^2 \approx 1.56\ kg \cdot m^2 \tag{10.16}$$

Ahora toca calcular el momento de inercia de los brazos. Estos los tratamos como masas puntuales, lo que permite usar la ecuación 10.7. Esto es:

$$I_{b1} = 2mr_1^2 = 2(4\,kg)(0.9\ m)^2 = 6.48\ kg \cdot m^2 \tag{10.17}$$

donde se ha multiplicado por dos debido a que tenemos dos brazos. Para el caso posterior con los brazos repregados:

$$I_{b2} = 2mr_2^2 = 2(4\,kg)(0.3\ m)^2 = 0.72\ kg \cdot m^2 \tag{10.18}$$

Con esto podemos calcular los momentos de inercia en los dos instantes:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_c + I_{b1} \approx 1.56{+}6.48\ kg \cdot m^2 = 8.04\ kg \cdot m^2 \\ I_2 &= I_c + I_{b2} \approx 1.56{+}0.72\ kg \cdot m^2 = 2.28\ kg \cdot m^2 \end{aligned} \tag{10.19}$$

2. Obten ω_2.

R: Aplicando la conservación del momento angular $L_1 = L_2$, tenemos que:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Longrightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{8.04}{2.28}2\frac{rad}{s} \approx 7.05\ \frac{rad}{s} \tag{10.20}$$

Esto quiere decir que la velocidad angular aumenta si el patinador acerca sus brazos a su cuerpo. Es decir, empieza a girar más rápido.
2. Calcula ΔK.

R: Tenemos que la energía cinética está dada por la ecuación 10.6, por lo que para cada instante tenemos las siguientes energías:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2}(8.04\ kg \cdot m^2)\left(2\frac{rad}{s}\right)^2 = 16.08\ J \\ K_2 &= \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2}(2.28\ kg \cdot m^2)\left(7.05\frac{rad}{s}\right)^2 \approx 56.66\ J \end{aligned} \tag{10.21}$$

Esto significa que la energía cinética aumento unas 3.5 veces por el mero hecho de acercar los brazos. Con esto, la diferencia de energía cinética es:

$$\Delta K = K_2 - K_1 \approx 41 \quad J \tag{10.22}$$

Nótese que, aunque L se conserva, la energía cinética no tiene por qué conservarse (es la energía mecánica la que se conserva). En este proceso el patinador realizó trabajo interno (sus músculos hicieron trabajo para acercar los brazos). Ese trabajo aumenta la energía rotacional del sistema. Es decir, las fuerzas internas (musculares) hacen trabajo al contraer los brazos y reducir la energía potencial interna, convirtiéndola en energía cinética rotacional.

10.3. Forma matricial del tensor de inercia

Para un movimiento simple, como un disco que gira alrededor de su centro, un solo valor de momento de inercia I es suficiente. Sin embargo, para un objeto tridimensional que no rota alrededor de un eje de simetría, la situación es más compleja. Físicamente, el hecho de que un objeto rote alrededor de un de simetría significa que tanto el momento angular $\vec{L}$ como la velocidad angular $\vec{\omega}$ son paralelos (apuntan a la misma dirección). No obstante, en cuerpos con geometría más compleja, o rotaciones fuera de estos ejes, el momento angular podría no ser paralelo a la velocidad angular. Esto significaría que la ecuación 10.14 ($\vec{L} = I\vec{\omega}$) no sería válida. Por lo tanto, el factor de inercia I debe ser más complejo para esta situación. La matriz de inercia (o tensor de inercia) resuelve este problema al proporcionar una 'función' que transforma el vector de velocidad angular en el vector de momento angular. En lugar de un simple escalar, es la matriz de inercia la que nos dice cómo se distribuye la inercia del objeto en las tres dimensiones.
La matriz de inercia, por tanto, se puede escribir como (con respecto a un eje de rotación):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{10.23}$$

Los términos fuera de la diagonal (I_{xy}, I_{xz}, etc.) se llaman productos de inercia. Son estos términos los que, cuando se multiplican por $\vec{\omega}$, desvían el momento angular y hacen que $\vec{L}$ no sea paralelo a $\vec{\omega}$. Si un objeto tiene una simetría tal que los productos de inercia son cero, entonces $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ sí son paralelos. Estos ejes de simetría son los ejes principales de inercia.
Para encontrar la forma de cada una de las componentes, debemos volver a la ecuación 10.14 para hacerla más general. Para esto tomaremos la velocidad general para un sistema rotatorio dada por la ecuación 2.56 ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$). Esto nos lleva a tener el siguiente momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \tag{10.24}$$

Usando la identidad vectorial: $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, podemos escribir el momento angular como:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m(\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) = m(r^2\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) \tag{10.25}$$

Usando la notación tensorial, escribiremos este vector como la componente i-ésima:

$$L_i = m(r^2\omega_i - r_i(r_j\omega_j)) \tag{10.26}$$

donde hemos usado la convención de suma de Einstein (como lo mostrado en la ecuación 8.8) para el segundo término de la derecha. Dentro de la notación tensorial existe una cantidad llamada *delta de Kronecker*, la cual se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si tenemos que } i = j \\ 0, & \text{si tenemos que } i \neq j \end{cases} \tag{10.27}$$

Con esto, podemos escribir cualquier i-ésima componente de un vector como $\delta_{ij}A_j = A_i$. Esto porque δ_{ij} sería sero para todo valor distinto entre i y j, pero solo sería uno en caso de que $i = j$, lo que llevaría a $\delta_{ii}A_{j=i} = A_i$. Con esto, podemos escribir $\omega_i = \delta_{ij}\omega_j$. Agregando esto en la ecuación 10.26:

$$L_i = m(r^2\delta_{ij}\omega_j - r_i(r_j\omega_j)) = m(r^2\delta_{ij} - r_ir_j)\omega_j \tag{10.28}$$

De esta forma, hemos logrado separar la parte angular del resto de términos de la misma forma en la que se hizo en la ecuación 10.14. Luego, podemos escribir el momento angular como:

$$\boxed{L_i = I_{ij}\omega_j} \tag{10.29}$$

donde las componentes del tensor de momento de inercia son:

$$\boxed{I_{ij} = m(r^2\delta_{ij} - r_ir_j)} \tag{10.30}$$

Esta expresión indica que el término mr^2 solo aparece, por propiedad de la delta de Kronecker, cuando $i = j$. Es decir, cuando consideramos los ejes principales de rotación. Con esto, podemos escribir todos los componentes para el caso cartesiano como:

$$\boxed{\begin{aligned}
I_{xx} &= m(r^2 - x^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = m(y^2 + z^2) \\
I_{xy} &= -m(xy) \\
I_{xz} &= -m(xz) \\
I_{yx} &= I_{xy} \\
I_{yy} &= m(r^2 - y^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - y^2) = m(x^2 + z^2) \\
I_{yz} &= -m(yz) \\
I_{zx} &= I_{xz} \\
I_{zy} &= I_{yz} \\
I_{zz} &= m(r^2 - z^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - z^2) = m(x^2 + y^2)
\end{aligned}} \tag{10.31}$$

Donde notamos que esta es una matriz simétrica, lo que significa que las componentes $I_{ij} = I_{ji}$. Por lo tanto, no tenemos que calcular las nueve componentes sino que solo basta con calcular 6 de cada matriz de inercia. Ahora, reescribiendo el elemento de masa dm tenemos que las componentes son integrales de la forma ($I_{ij} = \int_V \rho(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dV$):

$$\boxed{\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_V \rho(y^2 + z^2)dV \\
I_{xy} &= -\int_V \rho(xy)dV \\
I_{xz} &= -\int_V \rho(xz)dV \\
I_{yx} &= I_{xy} \\
I_{yy} &= \int_V \rho(x^2 + z^2)dV \\
I_{yz} &= -\int_V \rho(yz)dV = I_{zy} \\
I_{zx} &= I_{xz} \\
I_{zy} &= I_{yz} \\
I_{zz} &= \int_V \rho(x^2 + y^2)dV
\end{aligned}} \tag{10.32}$$

Algunas observaciones importantes: Las componentes diagonales de la matriz de inercia (estas son I_{xx}, I_{yy} y I_{zz}) son los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z respectivamente. Esto significa que, por ejemplo, la componente I_{xx} mide la resistencia del cuerpo a girar alrededor del eje x. Si bien la matriz es simétrica (lo que reduce de 9 a 6 la cantidad de componentes), también sucede que si el cuerpo es simétrico respecto a un plano, algunos de estos productos de inercia se anulan, reduciendo aún más la cantidad de componentes a calcular.

Con esta definición de cada componente, podemos escribir el momento angular de la ecuación 10.14 en su forma matricial usando la matriz 10.23:

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

Con esto, cada componente del vector de momento angular se puede escribir como:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{10.34}$$

Este resultado significa que los ejes de rotación, a pesar de ser perpendiculares entre sí, tienen la capacidad de influenciarse mutuamente. Por ejemplo, la componente x del momento lineal tiene la contribución $I_{xx}\omega_x$, donde I_{xx} representa la resistencia a rotar con respecto al eje (principal) x. El resto de términos $(I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)$ indican la contribución de las otras rotaciones. Es decir, que influencian el giro en la componente x. De forma análoga, los términos $I_{yx}\omega_x + I_{yz}\omega_z$ influencian el giro sobre la componente y, mientras que $I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y$ afectan a la rotación que se realiza sobre el eje z.

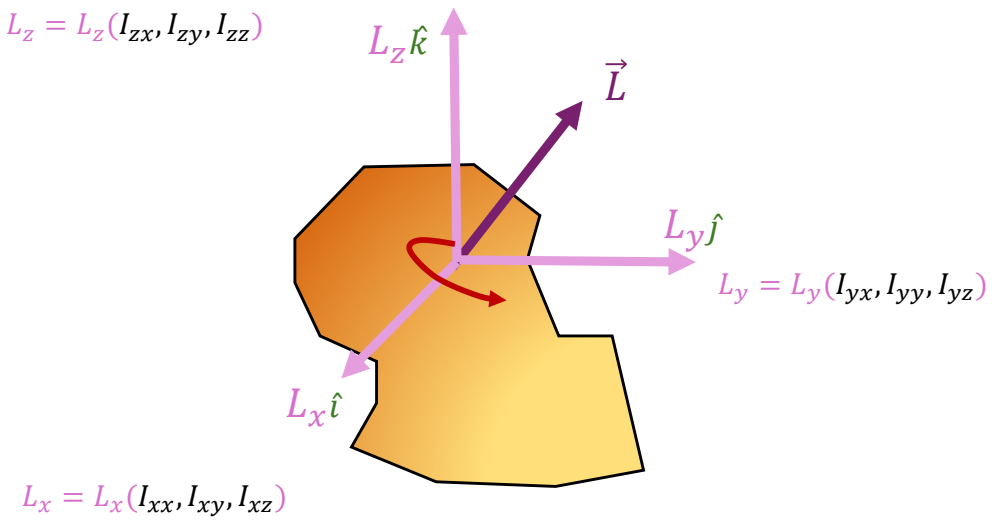


Figura 10.5: Para entender la complejidad del tensor de inercia podemos considerar el mismo sólido que rota dado por la Figura 10.4. Aquí notamos que el momengo angular $\vec{L}$ (que nos dice que el giro se conserva o no), se puede descomponer como cualquier otro vector como $\vec{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_k\hat{k}$. Sin embargo, la ecuación 10.34 nos indica que la conservación del momento angular depende de la resistencia a rotar dado por otros ejes.

Ahora que tenemos el caso de giros sobre ejes no simétricos, podemos calcular el torque de manera más general. Para esto recordamos que el torque es la derivada temporal del momento

angular. Sin embargo, ahora hay una componente de rotación. El torque, desde un punto de un sistema de referencia fijo, se descompone en una componente que rota con el objeto o cuerpo (muchas veces asociado al centro de masa) más el producto de la velocidad angular por el momento angular. Esto es lo mismo a lo mostrado en la ecuación 8.19, pero que en este caso, el sistema de referencia no inercial es un sistema de referencia que se encuentra en el cuerpo. Con esto tenemos que la derivada temporal de un vector se puede actualizar a:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{cuerpo} + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{10.35}$$

Para el caso del torque tenemos que el vector $\vec{A}$ es el momento angular:

$$\vec{\tau} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{cuerpo} + \vec{\omega} \times \vec{L} \tag{10.36}$$

La derivada temporal del momento angular es proporcional a $\dot{\omega}$, por lo que tenemos:

$$\vec{\tau} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} \tag{10.37}$$

En el caso vectorial, tenemos que el segundo término de la derecha es un producto cruz del mismo vector, lo cual da cero y se recupera la expresión para el torque en función de la aceleración angular (ecuación 10.15). No obstante, en términos de componentes y matrices de inercia, el momento angular no es paralelo a la velocidad angular, por lo que no es cero. Esto se escribe como:

$$\boxed{\tau_i = I_{ij}\alpha_j + \epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l} \tag{10.38}$$

Aquí hemos agregado la definición del producto vectorial de *Levi-Civita*. Este relaciona las componentes de un producto vectorial como:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{10.39}$$

Aquí, de igual forma que la delta de Kronecker, el simbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} tiene valores diferentes para ciertos valores:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación par de (1, 2, 3)} \\ -1, & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación impar de (1, 2, 3)} \\ 0, & \text{si dos o más índice son iguales} \end{cases} \tag{10.40}$$

Una permutación par es aquella que puede obtenerse de (1,2,3) mediante un número par de intercambios de índices. Por ejemplo, (2,1,3) es una permutación impar porque moví una sola vez el 1 hacia la derecha. Sin embargo, (2,3,1) es una permutación par porque moví dos veces el 1 hacia la derecha (partiendo desde (1,2,3)). Así, cuando los índices (i,j,k) son (1,2,3), (2,3,1) y (3,1,2), tenemos que $\epsilon = 1$. No obstante, si (i,j,k) son (2,1,3), (3,2,1) y (1,3,2),

implica que $\epsilon = -1$, En el caso de cualquier índice repetido (como (1,1,2) o (3,2,3)) $\epsilon = 0$. Como ejemplo, encontremos la primera componente de la ecuación 10.39.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})_1 = \epsilon_{1jk}a_jb_k =& \epsilon_{111}a_1b_1 + \epsilon_{112}a_1b_2 + \epsilon_{113}a_1b_3 \\ &+\epsilon_{121}a_2b_1 + \epsilon_{122}a_2b_2 + \epsilon_{123}a_2b_3 \\ &+\epsilon_{131}a_3b_1 + \epsilon_{132}a_3b_2 + \epsilon_{133}a_3b_3\end{aligned} \tag{10.41}$$

De aquí notamos que todos los índices repetidos (que contienen más de una vez el mismo número) son ceros. Estos son $\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \epsilon_{131} = \epsilon_{133} = 0$. Los únicos términos que no son cero son ϵ_{123} y ϵ_{132}:

$$(\vec{a}\times\vec{b})_1 = \epsilon_{1jk}a_jb_k = \epsilon_{123}a_2b_3 + \epsilon_{132}a_3b_2 \tag{10.42}$$

Acá podemos corroborar las permutaciones. En el primer término de la derecha tenemos (1,2,3), el cual se define como igual a uno, mientras que el segundo es (1,3,2), el cual se logra con una única permutación (intercambiar el dos por el tres para obtener (1,2,3)) por lo que es -1. Con esto, tenemos que la primera componente es:

$$(\vec{a}\times\vec{b})_1 = \epsilon_{1jk}a_jb_k = \epsilon_{123}a_2b_3 + \epsilon_{132}a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2 \tag{10.43}$$

Si hacemos que $1 = x$, $2 = y$ y $3 = z$, podemos escribir las componentes del torque. Partamos por el primer término de la derecha en la ecuación 10.38:

$$\begin{aligned}I_{xm}\alpha_m &= I_{xx}\alpha_x + I_{xy}\alpha_y + I_{xz}\alpha_z \\ I_{ym}\alpha_m &= I_{yx}\alpha_x + I_{yy}\alpha_y + I_{yz}\alpha_z \\ I_{zm}\alpha_m &= I_{zx}\alpha_x + I_{zy}\alpha_y + I_{zz}\alpha_z\end{aligned} \tag{10.44}$$

Para la primera componente del segundo término en la ecuación 10.38 tenemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xjk}\omega_jI_{kl}\omega_l = \epsilon_{xyz}\omega_yI_{zl}\omega_l + \epsilon_{xzy}\omega_zI_{yl}\omega_l = \omega_yI_{zl}\omega_l - \omega_zI_{yl}\omega_l = \omega_yI_{zx}\omega_x + \omega_yI_{zy}\omega_y + \omega_yI_{zz}\omega_z \\ -\omega_zI_{yx}\omega_x - \omega_zI_{yy}\omega_y - \omega_zI_{yx}\omega_x\end{aligned} \tag{10.45}$$

Para la segunda componente:

$$\begin{aligned}\epsilon_{yjk}\omega_jI_{kl}\omega_l = &-\omega_xI_{zx}\omega_x - \omega_xI_{zy}\omega_y - \omega_xI_{zz}\omega_z \\ &+\omega_zI_{xx}\omega_x + \omega_zI_{xy}\omega_y + \omega_zI_{xz}\omega_z\end{aligned} \tag{10.46}$$

Para la tercera componente:

$$\begin{aligned}\epsilon_{zjk}\omega_jI_{kl}\omega_l = &\omega_xI_{yx}\omega_x + \omega_xI_{yy}\omega_y + \omega_xI_{yz}\omega_z \\ &-\omega_yI_{xx}\omega_x - \omega_yI_{xy}\omega_y - \omega_yI_{xz}\omega_z\end{aligned} \tag{10.47}$$

En el caso en el que solo tenemos rotaciones en los ejes principales, los productos de inercia son cero. Es decir, que todo es cero excepto I_{xx}, I_{yy} y I_{zz}. Con esta restricción, la ecuación 10.44 es:

$$\begin{aligned} I_{xm}\alpha_m &= I_{xx}\alpha_x \\ I_{ym}\alpha_m &= I_{yy}\alpha_y \\ I_{zm}\alpha_m &= I_{zz}\alpha_z \end{aligned} \tag{10.48}$$

Para el segúndo término de la ecuación 10.38, tenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xjk}\omega_j I_{kl}\omega_l &= \omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{yy}\omega_y = (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \\ \epsilon_{yjk}\omega_j I_{kl}\omega_l &= \omega_z I_{xx}\omega_x - \omega_x I_{zz}\omega_z = (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z \\ \epsilon_{zjk}\omega_j I_{kl}\omega_l &= \omega_x I_{yy}\omega_y - \omega_y I_{xx}\omega_x = (I_{yy} - I_{xx})\omega_y\omega_x \end{aligned} \tag{10.49}$$

Ahora, juntando estas dos últimas ecuaciones, podemos escribir las componentes generales del torque (ecuación 10.38) como:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_x &= I_{xx}\alpha_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \\ \tau_y &= I_{yy}\alpha_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z \\ \tau_z &= I_{zz}\alpha_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_y\omega_x \end{aligned}} \tag{10.50}$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Euler para el momento de inercia con ejes de giros principales. Estas ecuaciones son relevantes porque explican efectos complejos que no son obvios a simple vista. Por ejemplo, el segundo término de la derecha depende de las velocidades angulares de los otros ejes de rotación. Esto refleja cómo la rotación alrededor de un eje influye en la dinámica de los otros ejes. Es decir, las rotaciones no son independientes sino que están acopladas al resto de ejes y esto es lo responsable de fenómenos como precesión (cambio gradual de la dirección del eje de rotación de un cuerpo en rotación, como el de la Tierra) y nutación (perturbación de un objeto en rotación).
Una forma sencilla de visualizar el efecto de esta rotación es por medio de una rotación libre de torques (fuerzas externas). Esto automáticamente convierte a la ecuación 10.38 en:

$$\tau_i = I_{ij}\alpha_j + \epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l = 0 \Longrightarrow I_{ij}\alpha_j = -\epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l \tag{10.51}$$

En el caso en el que el determinante de I_{ij} sea diferente de cero, podemos multiplicar la ecuación 10.51 por el inverso de I_{ij} que denotamos por I^{-1}_{mi}:

$$\Longrightarrow (I^{-1}_{mi})I_{ij}\alpha_j = -(I^{-1}_{mi})\epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l \tag{10.52}$$

Por definición, al multiplicar un tensor de segundo orden por su inversa (digamos $(A^{-1}A)$), aparece la matriz identidad, la cual tiene valores de cero y uno. Los 1 aparecen a lo largo de su diagonal, lo cual es lo mismo que decir que para índices repetidos. Para valores de indices no repetidos (fuera de la diagonal de la matriz), se obtienen valores iguales a cero. Esta propiedad es la misma a la mostrada por la delta de Kronecker definida en la ecuación 10.27. Por lo tanto, podemos escribir:

$$(I^{-1}_{mi})I_{ij} = \delta_{mj} \tag{10.53}$$

Al reemplazar en el término de la izquierda de la ecuación 10.52, nos queda:

$$(I_{mi}^{-1})I_{ij}\alpha_j = \delta_{mj}\alpha_m = \alpha_m \tag{10.54}$$

Donde hemos dejado solo las componentes m, las cuales son diferentes de cero.
Finalmente, al reemplazar 10.54 en 10.52, nos queda:

$$\boxed{\alpha_m = -(I_{mi}^{-1})\epsilon_{ijk}\omega_j I_{kl}\omega_l} \tag{10.55}$$

Esta ecuación nos dice que, a pesar de no existir fuerzas externas en el sistema que hagan cambiar su rotación, el tendor de inercia de los otros ejes son capaces de acelerar al sistema de igual forma. Un ejemplo de esta .ªuto-interacción"se conoce como *Efecto Dzhanibekov* (Figura 10.6).

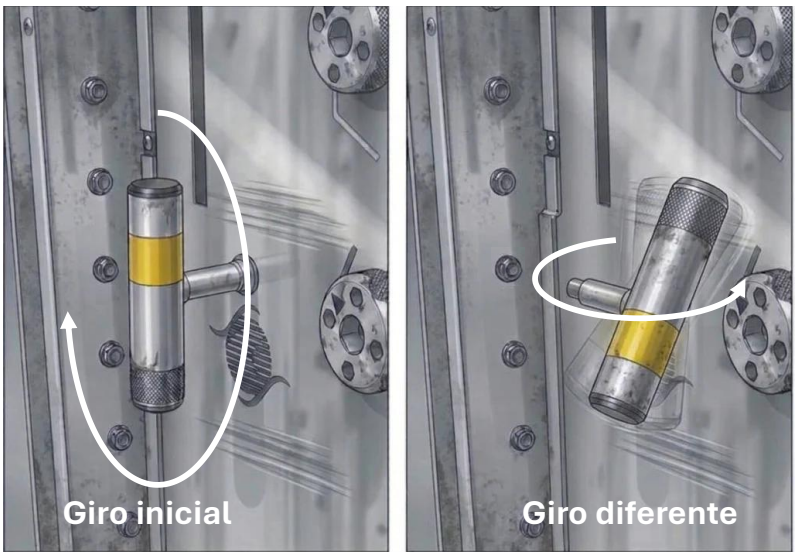


Figura 10.6: El *Efecto Dzhanibekov* es uno de los ejemplos más conocidos sobre como la rotación en un eje genera que el sistema termine rotando en otra dirección. Imagen propia.

Ejercicio resuelto
Sea un cuerpo rígido rígido con momentos principales de inercia $I_{xx} = I_{yy} = 2\ kg \cdot m^2$, I_{zz}= $kg \cdot m^2$, donde no actúan torques externos. En el instante inicial t =0, tenemos una velocidad angular en co-rotante (componentes en ejes principales) igual a: $\vec{\omega}(0)$ =(1,0,5) rad/s.

1. Resuelve las ecuaciones de Euler libres para $\vec{\omega}(t)$.

R: Si no hay torques, significa que las componentes del torque (ecuación 10.50) son iguales a cero:

$$\begin{aligned} I_{xx}\alpha_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_{yy}\alpha_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z &= 0 \\ I_{zz}\alpha_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_y\omega_x &= 0 \end{aligned} \tag{10.56}$$

Como el enunciado nos indica que $I_{xx} = I_{yy}$, automáticamente sabemos que la tercera ecuación es $I_{zz}\alpha_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_y\omega_x = I_{zz}\alpha_z = 0$. Como I_{zz} es diferente de cero, se concluye que $\alpha_z = 0$. Esto también significa que la integral (velocidad angular en eje z) sea constante: $\omega_z =$ constante. Del enunciado sabemos que el valor de ω_z al inicio es 5 rad/s, lo que implica que es $\omega_z(t) =$5 rad/s. Luego, estas condiciones se pueden imponer a la ecuación 10.56:

$$\begin{aligned} I_{xx}\alpha_x &= (I_{xx} - I_{zz})\omega_y\omega_z \\ I_{xx}\alpha_y &= -(I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z \end{aligned} \tag{10.57}$$

Definiendo la constante $\Omega_I = \frac{I_{xx}-I_{zz}}{I_{xx}}\omega_z$, el par de ecuaciones ahora se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \alpha_x = \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{xx}}\omega_z\omega_y = \dot{\omega}_x \qquad &\rightarrow \qquad \dot{\omega}_x = \Omega_I\omega_y \\ \alpha_y = -\frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{xx}}\omega_z\omega_x = \dot{\omega}_y \qquad &\rightarrow \qquad \dot{\omega}_y = -\Omega_I\omega_x \end{aligned} \tag{10.58}$$

Ahora, derivando temporalmente $\dot{\omega}_x$, tenemos $\ddot{\omega}_x = \Omega_I\dot{\omega}_y = \Omega_I(-\Omega_I\omega_x) = -\Omega_I^2\omega_x$. Es decir que:

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_x + \Omega_I^2\omega_x = 0 \\ \ddot{\omega}_y + \Omega_I^2\omega_y = 0 \end{aligned} \tag{10.59}$$

donde se ha aplicado el mismo procedimiento a la componente y. El resultado nos muestra que la ecuación para ambos ejes de rotación corresponde a oscilaciones armónicas ya que sus soluciones son del tipo:

$$\omega_x(t) = A_x\cos(\Omega_I t) + B_x\sin(\Omega_I t) \tag{10.60}$$

donde A_x, A_y y $\omega_{0,z}$ son constantes y la oscilación tiene la frecuencia Ω_I. Al aplicar la primera derivada temporal, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x(t) = -\Omega_I A_x\sin(\Omega_I t) + B_x\Omega_I\cos(\Omega_I t) = \Omega_I\omega_y(t) \\ \Longrightarrow \omega_y(t) = -A_x\sin(\Omega_I t) + B_x\cos(\Omega_I t) \end{aligned} \tag{10.61}$$

De las condiciones iniciales tenemos que $\omega_x(0) = 1\,rad/s$. El único término que sobrevive en la ecuación 10.60 es A_x, por lo que este es igual a uno. También sabemos que $\omega_y(0) = 0\,rad/s$, lo que implica que, aplicada a la ecuación 10.61, $B_x = 0$. Con esto, la solución general es:

$$\vec{\omega}(t) = (\cos(\Omega_I t), -\sin(\Omega_I t), \omega_z) \tag{10.62}$$

Aquí, el valor de Ω_I es:

$$\Omega_I = \frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_z = \frac{2-1}{2}5\,\frac{rad}{s} = 2.5\;\frac{rad}{s} \tag{10.63}$$

Con esto, la ecuación para este ejercicio es:

$$\vec{\omega}(t) = (\cos(2.5t), -\sin(2.5t), 5)\;\;\frac{rad}{s} \tag{10.64}$$

2. Demuestra que el momento angular y la enercía cinética se conserva para este sistema.

R: El momento angular se puede calcular usando la ecuación 10.14:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x = 2\cos(2.5t) \\ L_y &= I_{yy}\omega_y = -2\sin(2.5t) \\ L_z &= I_{zz}\omega_z = 5 \end{aligned} \tag{10.65}$$

Por lo tanto, el momento angular es:

$$\vec{L}(t) = (2\cos(2.5t), -2\sin(2.5t), 5) \quad \frac{kg \cdot m^2}{s} \tag{10.66}$$

Para demostrar que el momento angular es constante, asumimos que su magnitud no cambia. Es decir, que el módulo es constante. Para esto hacemos:

$$\begin{aligned} |\vec{L}(t)| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} &= \sqrt{4\cos^2(2.5t) + 4\sin^2(2.5t) + 25} \\ &= \sqrt{4(\cos^2(2.5t) + \sin^2(2.5t)) + 25} = \sqrt{29} \end{aligned} \tag{10.67}$$

Aquí notamos que se conserva el módulo del momento angular (no hay torque externo). Es decir, su magnitud es fija a pesar de que la dirección de L cambia (precesión alrededor del eje 3). La energía cinética se puede calcular usando la ecuación 10.6:

$$K = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 = \frac{1}{2}\left(2\cos^2(2.5t) + 2\sin^2(2.5t) + 25\right) = \frac{1}{2}(2 + 25) = 13.5\ J \tag{10.68}$$

Lo cual es un valor constante en el tiempo, por lo que se verifica que la energía se conserva (la única energía presente en este sistema, ya que no hay energías potenciales y la interna no cambia).

10.4. Teorema de Steiner (o de los Ejes Paralelos)

El teorema de Steiner es una herramienta fundamental en la dinámica de cuerpos rígidos que nos permite calcular el momento de inercia de un cuerpo alrededor de cualquier eje de rotación si ya conocemos el momento de inercia alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa del cuerpo. Sin este teorema, tendríamos que calcular una nueva integral de volumen cada vez que el eje de rotación cambiara.
Consideremos que $\vec{r}$ es el vector posición de cada elemento de volumen. Luego, este se puede escribir como:

$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{r}' \tag{10.69}$$

donde $\vec{R}_{CM}$ es la posición del centro de masa y $\vec{r}'$ es la posición del elemento de masa medido desde el centro de masa. En su forma tensorial es $r_i = R_i + r'_i$, donde hemos renombrado R_{CM} como R por simplificación de notación. Reemplazando en la ecuación 10.30, se obtiene:

$$I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dm = \int (|R_i + r'_i|^2\delta_{ij} - (R_i + r'_i)(R_j + r'_j))dm \tag{10.70}$$

De aquí tenemos que al expandir nos queda:

$$\begin{aligned} |R_i + r'_i|^2 &= |R_i|^2 + 2R_i r'_i + |r'_i|^2 \\ (R_i + r'_i)(R_j + r'_j) &= R_i R_j + R_i r'_j + r'_i R_j + r'_i r'_j \end{aligned} \tag{10.71}$$

Con esto, reemplazamos en la ecuación 10.70, quedandonos la expresión:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int \left[(|R_i|^2 + 2R_i r'_i + |r'_i|^2)\delta_{ij} - (R_i R_j + R_i r'_j + r'_i R_j + r'_i r'_j))\right] dm \\ &= \int (|r'_i|^2\delta_{ij} - r'_i r'_j)dm + \int (|R_i|^2\delta_{ij} - R_i R_j)dm \\ &\quad + \int (2R_i r'_i\delta_{ij} - (R_i r'_j + r'_i R_j))dm \end{aligned} \tag{10.72}$$

Aquí pasa algo interesante: Los primeros dos términos de la última igualdad constituyen la definición de momento de inercia, pero para el sistema en función de $\vec{r}'$ y el centro de masa. Esto es:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \int (|r'_i|^2\delta_{ij} - r'_i r'_j)dm \\ I_{ij}^{Steiner} &= \int (|R_i|^2\delta_{ij} - R_i R_j)dm = M(|R_i|^2\delta_{ij} - R_i R_j) \end{aligned} \tag{10.73}$$

Esto nos presenta la última integral de términos cruzados. De aquí notamos que R_i es un vector constante, pues relaciona el centro de masa de otro sistema que se encuentra fijo. Por lo tanto, la última integral de la ecuación 10.72 se puede escribir como:

$$\int (2R_i r'_i\delta_{ij} - (R_i r'_j + r'_i R_j))dm = 2R_i\delta_{ij}\int r'_i dm - R_i\int r'_j dm - R_j\int r'_i dm \tag{10.74}$$

donde R_i puede salir de la integral. Aquí es claro que las integrales son sobre r'_i: $\int r'_i dm$. Recordando la ecuación 3.46, el centro de masa se define como $R_i = \frac{1}{M}\int r_i dm$. Si hacemos la integral de la definición en 10.69, nos queda:

$$r_i = R_i + r'_i \qquad \rightarrow \int r_i dm = \int R_i dm + \int r'_i dm \tag{10.75}$$

Recordando la definición de centro de masa, tenemos que el primer término de la derecha es igual a MR_i, mientras que R_i, al ser constante, sale de la integral, quedando $R_i\int dm = R_i M$. Al reemplazar en la última ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} \int r_i dm = \int R_i dm + \int r'_i dm \qquad &\rightarrow \qquad R_i M = R_i M + \int r'_i dm \\ &\Longrightarrow R_i M - R_i M = \int r'_i dm = 0 \end{aligned} \tag{10.76}$$

Con esto vemos que el término integral $\int r'_i dm$ es igual a cero. Esto implica que el último término integral de la ecuación 10.72 es igual a cero, por lo que podemos escribir el momento de inercia como:

$$\boxed{I_{ij}^{nuevo-eje} = I'_{ij} + I_{ij}^{Steiner} = I'_{ij} + M(|R_i|^2 \delta_{ij} - R_i R_j)} \tag{10.77}$$

donde $I_{ij}^{Steiner}$ y I'_{ij} se definen en 10.73. Esta ecuación indica que el tensor de inercia respecto a cualquier punto se obtiene sumando el tensor respecto al centro de masa más un término de corrección debido al desplazamiento de ejes. Nótese que en algunos libros y cursos al término I'_{ij} se le llama término I_{ij}^{CM} porque es el tensor de inercia respecto a ejes que pasan por el centro de masa. Este término de Steiner revela que la resistencia a girar aumenta cuanto más lejos esté la masa del eje de rotación. Aquí es importante destacar que originalmente R_i es un vector que apunta al centro de masa visto desde un sistema de referencia fijo. No obstante, el término de Steiner en la ecuación 10.77 es válido para cualquier desplazamiento, no necesariamente a un origen fijo. Esto significa que puedo poner un sistema de referencia en cualquier otro lugar que no coincida con el centro de masa. Si renombramos R_i como d_i, la distancia al nuevo eje, tenemos:

$$I_{ij}^{nuevo-eje} = I'_{ij} + M(|d_i|^2 \delta_{ij} - d_i d_j) \tag{10.78}$$

Si ahora consideramos que d_i solo apunta en una única dirección ($d_i = d$), el resto de componentes será cero. Es decir que $\vec{d} = (d, 0, 0)$. Si además renombramos I'_{ij} como I_{ij}^{CM}, medida de la inercia con respecto al centro de masa, podemos obtener la expresión más famosa del teorema de Steiner:

$$I_{ij}^{nuevo-eje} = I_{ij}^{CM} + Md^2 \tag{10.79}$$

En lo personal, no recomiendo esta fórmula ya que puede llevar a confusiones, sobre todo, sobre sumar o no la contribución de Steiner. Es por esto que es mejor usar la expresión general:

$$\boxed{I_{ij}^{nuevo-eje} = I_{ij}^{CM} + M(|d_i|^2 \delta_{ij} - d_i d_j)} \tag{10.80}$$

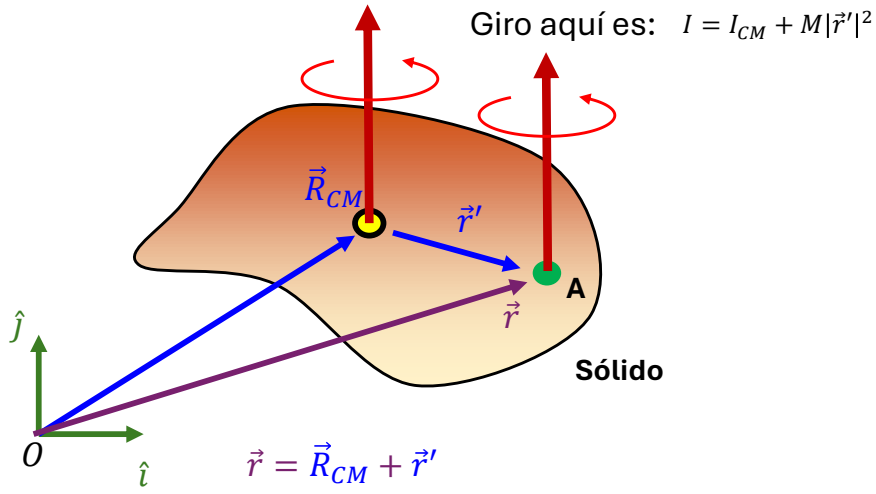


Figura 10.7: El teorema de Steiner, o de los ejes paralelos, nos dice que la resistencia a rotar con respecto a un eje que pasa por el punto A es igual a la resistencia que existe en el centro de masa (punto amarillo) más el término $M|\vec{r}'|^2$. Es decir, que mientras más lejos hacemos rotar un objeto con respecto a su centro de masas, más se resiste a rotar.

Ejercicio resuelto

Considera una barra delgada de longitud L y masa M, orientada a lo largo del eje x, con densidad lineal $\lambda = M/L$. Queremos calcular el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa por un punto a una distancia d del centro de masa de la barra (eje paralelo). Usa integrales y el teorema de Steiner.

R: Definiremos que la posición dentro de esta barra es $x \in [-L/2, L/2]$, donde el centro ($x = 0$) es el centro de masa. Esto significa que $\vec{r}' = (x, 0, 0)$, lo que implica que $|\vec{r}'|^2 = x^2 + 0 + 0 = x^2$. También definiremos el vector de desplazamiento desde el centro de masa hasta el nuevo eje como $\vec{d} = d\hat{x}$. Es decir que $\vec{d} = (d, 0, 0)$. Ahora definimos las componentes del momento de inercia con respecto al centro de masa usando la ecuación 10.9:

$$I_{ij}^{CM} = I'_{ij} = \int (|r'_i|^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) dm = \int (x^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) dm \tag{10.81}$$

Para las componentes principales tenemos:

$$\begin{aligned} I_{xx}^{CM} &= \int (x^2 \delta_{xx} - r'_x r'_x) dm = \int (x^2 - xx) dm = 0 \\ I_{yy}^{CM} &= \int (x^2 \delta_{yy} - r'_y r'_y) dm = \int (x^2 - yy) dm = \int x^2 dm \\ I_{zz}^{CM} &= \int (x^2 \delta_{zz} - r'_z r'_z) dm = \int (x^2 - zz) dm = \int x^2 dm \end{aligned} \tag{10.82}$$

Esto porque $\vec{r}$ solo tiene componente en el eje x, por lo que $y = z = 0$. El resto de momentos de inercia (productos de inercia) son ceros por dos razones. Primero, la delta de Kronecker δ_{ij} es cero para $i \neq j$ pero también porque en el factor $r'_i r'_j$ se multiplican las componentes por y o z, que ya valen cero (ya se consideró el único caso en el que no es cero: $r'_i r'_j = r'_x r'_x = xx$). Ahora recordamos que la densidad lineal es $\lambda = dm/dx \rightarrow dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$. Con esto, las únicas componentes del momento de inercia se transforman en:

$$\begin{aligned} I_{yy}^{CM} &= \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{3L} \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3 \right] \\ &= \frac{2M}{3L} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ML^2 \\ I_{zz}^{CM} &= I_{yy}^{CM} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned} \tag{10.83}$$

Con esto, tenemos la matriz de momento de inercia:

$$\mathbf{I}^{CM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} ML^2 \end{pmatrix} \tag{10.84}$$

Ahora debemos calcular la corrección de Steiner del momento de inercia. Es decir, calcular el segundo término de la ecuación 10.80. Del enunciado tenemos que la distancia al eje se encuentra solo en el eje x, además de $|d_i|^2 = d^2$. Luego, tenemos que:

$$M(|d_i|^2 \delta_{ij} - d_i d_j) = M(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j) \tag{10.85}$$

Para los ejes principales tenemos:

$$\begin{aligned} M(d^2 \delta_{xx} - d_x d_x) &= M(d^2 \delta_{xx} - dd) = 0 \\ M(d^2 \delta_{yy} - d_y d_y) &= Md^2 \\ M(d^2 \delta_{zz} - d_z d_z) &= Md^2 \end{aligned} \tag{10.86}$$

De la misma forma que calculamos los productos de inercia para el caso del centro de masa, tenemos que δ_{ij} es igual a cero mientras que el producto $d_i d_j$ en componentes no diagonales también es nulo. Esto implica que el tensor de corrección es:

$$\mathbf{I}^{Steiner} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Md^2 & 0 \\ 0 & 0 & Md^2 \end{pmatrix} \tag{10.87}$$

Finalmente, basta con sumar las contribuciones para tener el momento de inercia total de esta barra:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} ML^2 + Md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} ML^2 + Md^2 \end{pmatrix} \tag{10.88}$$

Este resultado se puede analizar de muchas formas. Por ejemplo, las partículas de masa están alineadas con el eje por lo que no hay distancia perpendicular ($r' = 0$), haciendo que el cuerpo gire casi 'libremente'. Esto explica por qué $I_{xx} = 0$ y es consistente con la experiencia: una barra larga es muy fácil de girar como un lápiz entre los dedos. En el caso en que cambiamos el eje de rotación a un eje perpendicular a la barra, notamos que aumenta la dificultad de rotación. El término de Steiner refleja que cuanto más lejos está el eje del centro de masa (mayor d), más 'difícil' es girar el cuerpo, porque la masa efectiva se aleja del eje de rotación.

10.5. Energía cinética y matriz de inercia

La energía cinética es la energía que posee un cuerpo debido a su movimiento. Para un cuerpo rígido, este movimiento puede ser una combinación de traslación y rotación. Por lo tanto, su energía cinética total es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa. Para describir esto, apliquemos la derivada temporal a la condición dada en la ecuación 10.69:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_{CM} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \tag{10.89}$$

Ahora, usamos la misma idea de la ecuación 8.19 y aplicada al torque en la ecuación 10.36. Es decir, que el cambio de posición $\vec{r}'$ se puede escribir como:

$$\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{cuerpo} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{cuerpo} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{10.90}$$

donde notamos que el vector que apunta a cada elemento de masa $\vec{r}'$no cambia, lo que es la condición de la ecuación 10.1. Es decir, que $\vec{v}_{cuerpo}$ representa la velocidad de deformación del cuerpo, pero es cero debido a que aquí estamos tratando con cuerpos rígidos (que por definición no se deforman). Reagrupando tenemos que la velocidad es:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{10.91}$$

Ahora, escribiendo la energía cinética (ecuación 5.4) en forma integral, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int |v|^2 dm = \frac{1}{2}\int |\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 dm \tag{10.92}$$

Resolviendo el cuadrado de la última integral tenemos:

$$|\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 = (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}') = |\vec{v}_{CM}|^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 \tag{10.93}$$

Reemplazando en la energía cinética nos queda:

$$K = \frac{1}{2}\int |\vec{v}_{CM}|^2 dm + \frac{1}{2}\int 2\vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') dm + \frac{1}{2}\int |\vec{\omega} \times \vec{r}'|^2 dm \tag{10.94}$$

Aquí notamos que el primer término integral no depende de la velocidad del centro de masa ya que representa todo el sistema. Es decir, es la misma para todo el cuerpo. Esto implica que:

$$\frac{1}{2}\int |\vec{v}_{CM}|^2 dm = \frac{1}{2}|\vec{v}_{CM}|^2 \int dm = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2 \tag{10.95}$$

De la misma forma, la segunda integral tiene a la velocidad del centro de masa y a la velocidad angular. Ambos se aplican a todo el sistema, por lo que no dependen de la distribución de masa. Esto es:

$$\frac{1}{2}\int 2\vec{v}_{CM}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}')dm = \frac{1}{2}2\vec{v}_{CM}\cdot\left(\vec{\omega}\times\int \vec{r}'dm\right) \tag{10.96}$$

La integral que nos queda es sobre $\vec{r}'$, la cual es idéntica a la encontrada por la ecuación 10.76 y es nula. Por lo tanto, la segunda integral de 10.94 es igual a cero.
La tercera y última integral de la ecuación 10.94 es la más compleja. Primero, reescribimos el módulo cuadrado del producto cruz:

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 = (|\vec{\omega}||\vec{r}'|\sin(\theta))^2 \tag{10.97}$$

Como $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, podemos reescribir $\sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)$. Esto es:

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 = (|\vec{\omega}||\vec{r}'|)^2(1-\cos^2(\theta)) = (|\vec{\omega}||\vec{r}'|)^2 - (|\vec{\omega}||\vec{r}'|\cos(\theta))^2 \tag{10.98}$$

Por definición de producto punto, tenemos que $|\vec{A}\cdot\vec{B}| = AB\cos(\theta)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 = |\vec{\omega}|^2|\vec{r}|^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}')^2 \tag{10.99}$$

En notación tensorial, tenemos:

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 = (\omega_i\omega_i)(r'_j r'_j) - (\omega_i {r_i}')(\omega_j {r_j}') \tag{10.100}$$

donde se ha usado la convención de índices de Einstein (ecuación 8.8). Con esto, podemos reescribir la última integral de la ecuación 10.94 para la energía cinética como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int |\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 dm &= \frac{1}{2}\int ((\omega_i\omega_i)(r'_j r'_j) - (\omega_i {r_i}')(\omega_j {r_j}'))dm \\
&= \frac{1}{2}\int ((\omega_i\omega_j\delta_{ji})(r'_k r'_k) - (\omega_i {r_i}')(\omega_j {r_j}'))dm \\
&= \frac{1}{2}\omega_i\omega_j\int (\delta_{ji} r'_k r'_k - {r_i}'{r_j}')dm \\
&= \frac{1}{2}\omega_i\omega_j\int (|r'_k|^2\delta_{ji} - {r_i}'{r_j}')dm
\end{aligned} \tag{10.101}$$

De aquí notamos que el término integral (última expresión) es la misma que define el momento de inercia I'_{ij} (y que posteriormente es renombrado como I^{CM}_{ij}) en la ecuación 10.73. Esto significa que:

$$\frac{1}{2}\int |\vec{\omega}\times\vec{r}'|^2 dm = \frac{1}{2}\omega_i I^{CM}_{ij}\omega_j \tag{10.102}$$

Con esto, podemos escribir la energía cinética como:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\omega_i I_{ij}^{CM}\omega_j = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}^{CM}\omega = K_{CM} + K_{rot}} \tag{10.103}$$

Esto quiere decir que para un cuerpo rígido, la energía cinética se puede descomponer en su parte de traslación (del centro de masas) y una componente de rotación asociada al momento de inercia.

Ejercicio resuelto
Considera un cilindro sólido homogéneo de masa M, radio R y altura h, que se mueve sobre una superficie horizontal sin deslizar (como un rodillo) con velocidad lineal V_{CM} y simultáneamente gira alrededor de su eje longitudinal con velocidad angular ω.

1. Calcula la matriz de inercia con respecto al centro de masa.

R: Con las variables mencionadas, tenemos que la densidad es $\rho_c = M/V = M/\pi R^2 h$, la cual es constante dentro de todo el cilindro. Con esto, el elemento de masa dm se puede escribir como $dm = \rho_c dV = \frac{M}{\pi R^2 h}dV$. Tomando la ecuación 2.33, tenemos que el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es: $dV = rdrd\theta dz$, donde el radio va desde cero hasta R, la altura desde $-h/2$ hasta $h/2$ (con el centro de masa en $z = 0$) y el ángulo de cero a 360°. Ahora procedemos a encontrar el momento de inercia para el centro de masa usando la ecuación 10.81, que es la versión integral de la ecuación 10.30:

$$I_{ij}^{CM} = \int (|r_i'|^2\delta_{ij} - r_i' r_j')dm = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (|r_i'|^2\delta_{ij} - r_i' r_j')rdrd\theta dz \tag{10.104}$$

Las componentes de este tensor de momento de inercia se encuentran en el recuadro 10.32. Estos dependen de las componentes x, y y z. Para coordenadas cilíndricas tenemos que: $x = r\cos(\theta)$ junto a $y = r\sin(\theta)$, (ecuación 2.74) mientras que z se mantiene inalterado. Con esto, las componentes diagonales del tensor de momento de inercia son:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_V \rho(y^2 + z^2)dV = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (r^2\sin^2(\theta) + z^2)rdrd\theta dz \\
I_{yy} &= \int_V \rho(x^2 + z^2)dV = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (r^2\cos^2(\theta) + z^2)rdrd\theta dz \\
I_{zz} &= \int_V \rho(x^2 + y^2)dV = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))rdrd\theta dz
\end{aligned} \tag{10.105}$$

Al integrar sobre la altura, tenemos:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(r^3\sin^2(\theta)+\frac{1}{12}rh^2\right)drd\theta \\ I_{yy} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(r^3\cos^2(\theta)+\frac{1}{12}rh^2\right)drd\theta \\ I_{zz} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3 drd\theta \end{aligned} \tag{10.106}$$

Integrando sobre la componente radial:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}R^4\sin^2(\theta)+\frac{1}{12}\frac{R^2}{2}h^2\right)d\theta = \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}R^2\sin^2(\theta)+\frac{1}{12}\frac{1}{2}h^2\right)d\theta \\ I_{yy} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}R^4\cos^2(\theta)+\frac{1}{12}\frac{R^2}{2}h^2\right)d\theta = \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}R^2\cos^2(\theta)+\frac{1}{12}\frac{1}{2}h^2\right)d\theta \\ I_{zz} &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\frac{R^4}{4}d\theta = \frac{MR^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta \end{aligned} \tag{10.107}$$

Ahora, integrando sobre el ángulo:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{M}{\pi}\left(\frac{1}{4}R^2\pi+\frac{1}{12}\frac{2\pi}{2}h^2\right) = \frac{M}{12}\left(3R^2+h^2\right) \\ I_{yy} &= \frac{M}{\pi}\left(\frac{1}{4}R^2\pi+\frac{1}{12}\frac{2\pi}{2}h^2\right) = \frac{M}{12}\left(3R^2+h^2\right) \\ I_{zz} &= \frac{MR^2}{2} \end{aligned} \tag{10.108}$$

Aquí hay que notar que el cilindro es simétrico respecto a los tres planos coordenados. Esto indica que la distribución de masa no tiene ninguna inclinación preferente. Luego, no hay otros ejes de inercia, por lo que los productos de inercia son cero. Esto se debe a que los productos de inercia miden cuán 'desalineado' está el eje de rotación con respecto a la distribución de masa. Si el cuerpo es simétrico y el sistema está alineado con esa simetría, todos esos términos son cero. Con esto, la matriz de momento de inercia para el cilindro es:

$$\mathbf{I}^{CM} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}\left(3R^2+h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}\left(3R^2+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \tag{10.109}$$

2. Calcula la energía cinética para este cilindro.

R: Para calcular la energía cinética, usamos la ecuación 10.103. El término asociado al desplazamiento del centro de masa depende de la masa y la velocidad del centro de masa. Estos

términos se dan en el enunciado por lo que pasamos a calcular la energía cinética de rotación. Aquí nos dice que la velocidad angular ocurre en su eje longitudinal. Es decir, a lo largo del eje z: $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Con esto, el término rotacional de la energía cinética es:

$$\begin{aligned} K_{rot} = \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}^{CM} \omega &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(3R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\omega MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2 \end{aligned} \tag{10.110}$$

Por lo tanto, la energía cinética de este sólido es:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \omega^2 \tag{10.111}$$

Capítulo 11

Mecánica avanzada: Formalismo Lagrangiano

Si bien muchos de los conceptos relacionados con esta sección no son vistos en muchos cursos universitarios, siempre es bueno tener claro cómo se desarrolla la mecánica para describir eventos y procesos más complejos con los que uno se puede encontrar después de la universidad. De estos, surge la mecánica avanzada, la cual es un formalismo que extiende la mecánica de Newton y, en muchas ocasiones, vuelve más tratables muchos de los ejercicios de mayor dificultad del formalismo Newtoniano.

11.1. Principio de Maupertuis-Hamilton y Lagrangianos

El Principio de Maupertuis-Hamilton es una formulación alternativa a la mecánica de Newton. A diferencia de las Leyes de Newton, que se centran en las fuerzas y aceleraciones en un instante dado, el Principio de Maupertuis-Hamilton se basa en la idea de que la trayectoria real de un sistema físico entre dos puntos fijos en el tiempo es aquella que minimiza una cantidad llamada acción. Esto se debe a que, a medida que el sistema se vuelve más complejo, hay más ecuaciones de movimiento a resolver, lo cual se vuelve extremadamente complicado y propenso a errores. En cambio, este formalismo (llamado mecánica Lagrangiana) permite encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de una única función escalar (el Lagrangiano), lo que lo hace mucho más práctico y eficiente para sistemas con múltiples grados de libertad.

Ahora, ¿qué es un Lagrangiano? En esencia, un Lagrangiano es el equilibrio entre la tendencia del sistema a moverse lo más rápido posible (minimizar el tiempo de traslación) y la tendencia de permanecer en la posición de menor energía potencial. Es, conceptualmente, una mezcla entre el resultado de una fuerza que acelera el cuerpo y la inercia del cuerpo que quiere permanecer en un lugar. Es, en términos de leyes, una mezcla entre la primera y segunda ley de Newton, pero sin resolver las ecuaciones complejas que se derivan de éstas. Esto permite definir al Lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$\boxed{L = K - V} \tag{11.1}$$

Consideremos la Segunda ley de Newton (ecuación 3.13) y una fuerza conservativa en términos de un potencial (ecuación 5.37):

$$F = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{11.2}$$

Donde estamos realizando los cálculos a lo largo de un único eje. Ahora, notamos que la energía cinética $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ se puede relacionar con la suma de fuerzas si consideramos:

$$m\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \tag{11.3}$$

Reemplazando en la ecuación 11.2, nos queda:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{11.4}$$

Aquí viene una observación importante. La energía cinética no depende de la posición (depende de la velocidad), ni la potencial de la velocidad (suele depender de la posición) para que el sistema sea conservativo. Esto matemáticamente significa que:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{11.5}$$

Ahora, se puede agregar los términos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (K-V)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \qquad -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (K-V)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{11.6}$$

donde hemos definido $L = K - V$ (aunque a veces se define $L = T - V$ donde la energía cinética se escribe con la letra T en lugar de la letra K para hacer notar que nos encontramos en el formalismo Lagrangiano y no en la mecánica de Newton). Ahora, incorporamos esta definición a la ecuación 11.4, lo que nos queda como:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \tag{11.7}$$

Esta es la ecuación de movimiento para una partícula en presencia de una energía potencial. También llamada ecuación de *Euler-Lagrange*. De aquí podemos ver que el signo menos de la energía potencial es lo que define el lagrangiano, como es mostrado en la ecuación 11.1. También, podemos notar que la ecuación de movimiento se reduce a encontrar una única cantidad llamada Lagrangiano.

11.1.1. Mínima acción

Ahora bien, el principio de Maupertuis-Hamilton establece que una cantidad, llamada acción S, es mínima. Fue Pierre Louis Maupertuis, en la década de 1740, quien propuso inicialmente una cantidad llamada acción. Esta se definió como masa m por velocidad v multiplicado por la distancia l:

$$S_0 = mvl \tag{11.8}$$

Su motivación se basó en decir que 'la naturaleza es económica en todas sus acciones'. La noción de este principio es que, mientras más lejos viaje algo, necesariamente mayor es la acción; mientras más rápido vaya, mayor es su acción y si tiene más masa, mayor es su acción.

Para Maupertuis, la naturaleza sólo elige las trayectorias donde esta acción es menor. Así, la acción total de una trayectoria era la suma de todos los segmentos de dicha trayectoria. Es decir:

$$S = \sum S_0 = \sum mvl \tag{11.9}$$

Posteriormente, Leonhard Euler generalizó esta acción para una trayectoria continua:

$$S = \int mvdl \tag{11.10}$$

Posteriormente, Joseph-Louis Lagrange consideró este problema, cambiando dl por $dl = vdt$. Lo que significaba que ahora la integral depende del tiempo y no de las trayectorias explícitamente:

$$S = \int mv^2dt = \int 2Kdt = \int (K + K)dt \tag{11.11}$$

Si la energía se conserva, tenemos que $E = K + V$, lo que es lo mismo que $K = E - V$. Reemplazando tenemos:

$$S = \int (K + K)dt = \int (K - V + E)dt = \int (K - V)dt + \int Edt = \int Ldt + E\Delta t \tag{11.12}$$

donde hemos usado la definición del Lagrangiano dada en la ecuación 11.1. Esta última ecuación depende de una energía E que es constante. Si además tenemos que todo el sistema ocurre en tiempos iniciales y finales definidos $\Delta t = t_f - t_0$, el término $E\Delta t$ es siempre constante. Por lo tanto, si uno quiere considerar o encontrar el valor mínimo de una función (de la acción), agregarle o quitarle una constante no afecta su forma, por lo que se puede definir la acción únicamente como la integral en el tiempo del Lagrangiano. Es decir:

$$\boxed{S = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt} \tag{11.13}$$

Para minimizar la acción, hay que hacer la variación e igualarla a cero, esto es:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt = \int_{t_0}^{t_f} \delta L(x(t), \dot{x}(t), t)dt = 0 \tag{11.14}$$

Aquí es importante notar que no se habla de derivadas temporales sino de 'variación' denotada por δ, lo que significa que para dos tiempos fijos se busca encontrar la trayectoria óptima. Esto es conocido como un proceso estacionario.

Consideremos una variación en la trayectoria de un objeto dada por la forma:

$$x(t) \to x(t) + \epsilon\eta(t) \tag{11.15}$$

Aquí, ϵ es una constante pequeña y $\eta(t)$ es una función arbitraria que se define con las siguientes condiciones de borde: $\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$. Esto quiere decir que no se cambian el origen y final de la trayectoria del objeto. Esto nos permite definir la variación se define de la siguiente manera:

$$\delta S = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{S[x+\epsilon\eta] - S[x]}{\epsilon} \tag{11.16}$$

Con esto, la acción para esta nueva trayectoria modificada se escribe como:

$$S[x+\epsilon\eta] = \int_{t_0}^{t_f} L(x+\epsilon\eta, \dot{x}+\epsilon\dot{\eta}, t)dt \tag{11.17}$$

Usando la expansión en serie de Taylor ($f(t+\Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(\Delta t)^n$) para las componentes de posición y velocidad, tenemos que:

$$L(x+\epsilon\eta, \dot{x}+\epsilon\dot{\eta}, t) = L(x, \dot{x}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) + O(\epsilon^2) \tag{11.18}$$

Aquí tenemos que le primer término de la derecha es el lagrangiano original. El segundo es la contribución lineal de la variación mientras que $O(\epsilon^2)$ son términos de orden superior los cuales son despreciables para una variación infinitesimal. Esto es:

$$L(x+\epsilon\eta, \dot{x}+\epsilon\dot{\eta}, t) \approx L(x, \dot{x}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) \tag{11.19}$$

Reemplazando en la ecuación 11.17 nos queda que la acción en una trayectoria infinitesimalmente diferente es:

$$S[x+\epsilon\eta] \approx \int_{t_0}^{t_f} \left[L(x, \dot{x}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\right] dt \tag{11.20}$$

Queremos aplicar la definición de variación dada por la ecuación 11.16:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \frac{S[x+\epsilon\eta] - S[x]}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int_{t_0}^{t_f} \left[L(x, \dot{x}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\right] dt - \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_{t_0}^{t_f} \left[\epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt\end{aligned} \tag{11.21}$$

Notamos que el segundo término de la derecha hay una derivada temporal de la función η. Esto nos permite usar la regla de integración por partes. Esta es:

$$\int_{v_i}^{v_f} udv = uv|_{v_i}^{v_f} - \int_{u_i}^{u_f} vdu \tag{11.22}$$

Esta regla se puede reescribir en términos del tiempo si consideramos que $dv = \frac{dv}{dt}dt$ y $du = \frac{du}{dt}dt$. Esto transforma la regla de integración por partes a su versión temporal:

$$\int_{t_i}^{t_f} u\frac{dv}{dt}dt = uv|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} v\frac{du}{dt}dt \tag{11.23}$$

Aquí escogemos $v = \eta$, lo que implica que $\dot{v} = \dot{\eta}$. También tomamos $u = \partial L/\partial\dot{x}$, lo que lleva a $\dot{u} = \frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot{x})$. Con esto tenemos que:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{\eta}dt = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\eta\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)dt \tag{11.24}$$

Como el primer término de la derecha implica evaluar en $\eta(t_i)$ y en $\eta(t_f)$, este término se hace cero ya que por definición, esa función es cero en los extremos. Luego, podemos escribir la variación de la acción como:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\eta - \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\right]dt = \int_{t_0}^{t_f}\eta\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\right]dt = 0 \tag{11.25}$$

Como esta integral tiene que ser cero, es lo mismo que decir que la resta dentro de los paréntesis cuadrados también sea cero. Esto conduce a:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 0 \tag{11.26}$$

Esta es exactamente la misma ecuación 11.7 que describe la dinámica de partículas. Esto significa que la dinámica en el universo ocurre porque la naturaleza selecciona, entre todas las trayectorias posibles que conectan dos estados, aquella en la que la acción es estacionaria (mínima, máxima o en un punto de inflexión).

La interpretación del principio de Maupertuis-Hamilton (o principio de mínima acción) es muy profunda ya que indica que la trayectoria se determina teniendo en cuenta el estado inicial y final al mismo tiempo. Un estado final que aún no ocurre, volviendo la física a un estado no local, donde lo que las partículas realizan depende de un futuro y no de las meras fuerzas que se aplican sobre ellas (como indica la mecánica de Newton).

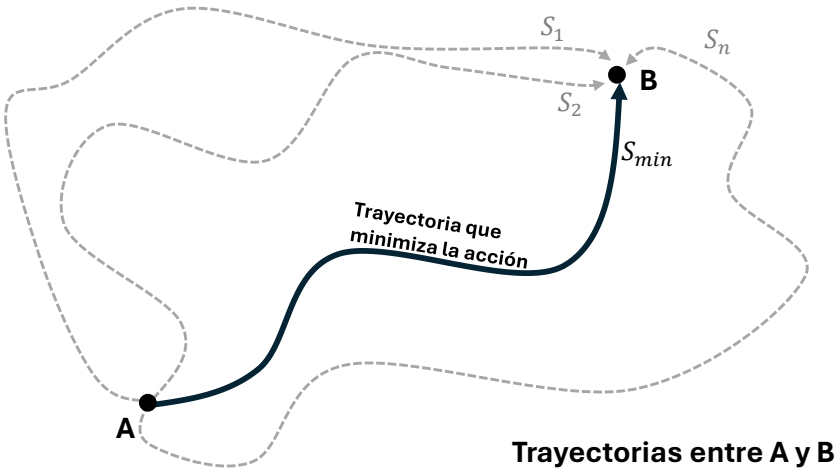


Figura 11.1: Imaginemos que tenemos infinitras trayectorias entre el punto A y B. Cada una de estas tendrá una acción S. Sin embargo, no todas las acciones tienen el mismo valor. Esto implica que siempre existirá una trayectoria con una acción mínima S_{min} (representada aquí como la curva negra). Es esta trayectoria la única posible según el formalismo dado por la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 11.7).

Ejercicio resuelto
Una partícula de masa m se mueve en el plano bajo la acción de un potencial central: $V = -\frac{k}{r}$ con k una constante positiva. Este es un potencial de atracción tipo gravitatoria o coulómbica, según la interpretación.

1. Escribe el lagrangiano en coordenadas polares.

R: La energía cinética en coordenadas polares (movimiento en el plano) es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{11.27}$$

donde hemos usado la velocidad de las coordenadas polares (ecuación 2.82). Luego, usando la ecuación para el Lagrangiano (ecuación 11.1):

$$L = K - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \tag{11.28}$$

2. Encuentre las ecuaciones de movimiento usando la ecuación de Euler-Lagrange.

R: La ecuación de Euler-Lagrange se encuentra en la ecuación 11.7. Esto significa que debemos calcular tres derivadas del lagrangiano por cada componente. En este caso hay una ecuación para la componente radial y la componente angular. Esto es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{11.29}$$

Para la componente radial tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}\right) = 2mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}\right) = m\dot{r} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \end{aligned} \tag{11.30}$$

Con esto, la ecuación de movimiento para la componente radial es:

$$m\ddot{r} - 2mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0 \tag{11.31}$$

Aplicando el mismo procedimiento para la componente angular, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}\right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}\right) = mr^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{11.32}$$

Lo que significa que:

$$mr^2\ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(\text{Constante}) \rightarrow mr^2\dot{\theta} = L = \text{Constante} \tag{11.33}$$

Aquí notamos que la ecuación para la componente angular tiene una cantidad que es constante. De hecho esta es el momento angular (ecuación 3.57). Lo que muestra que la conservación del momento angular nace naturalmente de la ecuación de Euler-Lagrange

11.2. Teorema de Emmy Noether

El Teorema de Noether es uno de los pilares de la física teórica moderna. Establece una profunda y (considerada como) elegante conexión entre las simetrías continuas en un sistema físico y las Leyes de conservación correspondientes. En términos simples, por cada propiedad de un sistema que no cambia (es decir, una simetría), existe una cantidad que se conserva. Este teorema fue formulado por la matemática alemana Emmy Noether en 1918. Nos dice que la conservación del momento, momento lineal y energía son manifestaciones de simetrías en la trayectoria de las partículas. Estas son:

Simetría en el espacio → conservación de momento lineal
Simetría en la rotación → conservación del momento angular. (11.34)
Simetría en el tiempo → conservación de la energía

La simetría quiere decir que ante cualquier cambio de traslación o temporal, las Leyes de la física siguen siendo inalteradas. Es decir, el sistema sigue siendo el mismo.



Figura 11.2: Fotografía real de Emmy Noether (1882-1935).

Ejercicio resuelto
Demuestre el teorema de Noether.

R: Consideremos que queremos desplazarnos a lo largo del eje x. Es decir, hay una traslación que se describe como:

$$x \quad \rightarrow \quad x + a \tag{11.35}$$

Como la energía cinética no depende la posición, cualquier cambio de posición no afecta a la energía cinética. Esto quiere decir que $K \neq K(x)$. Por lo tanto $\frac{\partial K}{\partial x} = 0$. Para que el sistema sea totalmente invariante bajo la traslación, significa que es el potencial el que no debe cambiar con la posición. Esto es $V(x) = V(x + a)$. Con esto, el cambio de potencial en función de la distancia es cero: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Luego, como el Lagrangiano se define como la diferencia entre estas energía, y ambas son cero con respecto a cambios de posición, tenemos

que una simetría de traslación implica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{11.36}$$

Reemplazando esto en la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 11.7) tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{constante} \tag{11.37}$$

Como los potenciales, en general, no depende de la velocidad, el cambio de Lagrangiano con la posición depende unicamente de la energía cinética. Esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = m\dot{x} = \text{constante} \Longrightarrow \boxed{P = \text{constante}} \tag{11.38}$$

Lo que demuestra que el momento lineal es constante bajo traslaciones.
Si ahora consideramos las traslaciones angulares, podemos realizar el mismo procedimiento. Es decir que la traslación ahora es:

$$\theta \quad \rightarrow \quad \theta + \alpha \tag{11.39}$$

La condición de simetría exige que no existan cambios de potencial a lo largo del eje angular. De hecho, esta situación si se cumple en caso de tener potenciales centrales, como el potencial gravitatorio ya, que estos dependen solo de la distancia al centro (radiales) no de los ángulos (ecuación 3.88). Luego tenemos que $V(\theta) = V(\theta + \alpha)$. Como se observa en la velocidad en coordenadas polares (ecuación 2.82), la velocidad tampoco depende del ángulo, sino de la velocidad angular $\dot{\theta}$. Como ni la energía cinética ni la potencial dependen de θ, el cambio de Lagrangiano con respecto al ángulo es cero: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. Con esto, en la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 11.7) nos queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{constante} \tag{11.40}$$

Aquí notamos que la energía potencial tampoco depende de $\dot{\theta}$, lo que significa que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)\right) = mr^2\dot{\theta} = \text{constante} \Longrightarrow \boxed{L = \text{constante}} \tag{11.41}$$

donde el momento angular es $L = mr^2\dot{\theta}$, como muestra la ecuación 3.57. Con esto, se demuestra que una invariante con respecto a cambios angulares lleva necesariamente a la conservación del momento angular. Para el cambio en el tiempo, tenemos que considerar que ni la energía cinética ni la potencial dependen explícitamente del tiempo. Esto significa que $L(t) = L(t + \tau)$, lo que lleva a la condición:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{11.42}$$

Aquí usamos la regla de la cadena para expandir la derivada total con respecto a las tres variables:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} \tag{11.43}$$

Aquí notamos que el primer término de la derecha tiene la derivada $\frac{\partial L}{\partial x}$. Esta derivada parcial es exactamente el que aparece en la ecuación de Euler-Lagrange (ecuación 11.7):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \tag{11.44}$$

Reemplazando en la ecuación 11.43 nos queda:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}(\dot{x}) \tag{11.45}$$

Los términos de la derecha son exactamente la definición de la derivada compuesta. Esta es $\frac{d}{dt}(fg) = g\frac{df}{dt} + f\frac{dg}{dt}$, donde $f = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ y $g = \dot{x}$. Por lo tanto:

$$\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \tag{11.46}$$

Juntando esto con la ecuación 11.45:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right) = 0 \Longrightarrow \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \text{constante} \tag{11.47}$$

La condición muestra que el término dentro de los paréntesis tiene que ser constante. Recordando de la ecuación 11.38 que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ y la definición del Lagrangiano $L = K - V$ (ecuación 11.1), podemos encontrar el término entre paréntesis:

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \dot{x}(m\dot{x}) - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = E \Longrightarrow \boxed{E = \text{constante}} \tag{11.48}$$

Como vemos, una traslación en el tiempo implica que la energía se conserva, indicando que las simetrías espaciotemporales se manifiestan como Leyes de conservación de cantidades físicas.

Capítulo 12

Reflexiones finales

Al cerrar este libro, hemos completado un viaje de más de 650 años por la historia de la mecánica. Comenzamos con los Calculadores de Oxford, quienes, con un razonamiento tan simple como el uniformiter y el uniformiter disformiter, sentaron las bases para el concepto de aceleración constante. Vimos cómo su pensamiento fue perfeccionado por el ingenio de Domingo de Soto, quien demostró la naturaleza uniforme de la gravedad, allanando el camino para el gigante que vendría después.

Con Kepler y Newton, nuestra comprensión del universo pasó de la cinemática a la dinámica, uniendo las causas (fuerzas) con los efectos (movimiento). Las leyes de Newton nos dieron un marco de trabajo ampliamente usado, pero también nos mostraron sus limitaciones a medida que los problemas se volvían más complejos.

El formalismo lagrangiano de Euler y Lagrange marcó un cambio paradigmático al basar la mecánica en la energía, en lugar de en las fuerzas, lo cual simplificó enormemente la resolución de problemas complejos. Finalmente, la obra culmina con la conexión profunda entre las simetrías y las leyes de conservación, un legado que nos dejó Emmy Noether y que continúa siendo una piedra angular de la física teórica.

El material presentado en este volumen, si bien abarca los principios esenciales de la dinámica, constituye solo el punto de partida para una exploración más profunda del movimiento y los secretos del universo. En un curso introductorio de mecánica, no es posible cubrir por completo desarrollos posteriores como el formalismo hamiltoniano, una extensión del lagrangiano que resulta indispensable en el estudio de la mecánica cuántica y la física estadística. Tampoco se aborda la dinámica de cuerpos rígidos en el contexto de la Relatividad General, donde el espacio-tiempo no es euclidiano y la gravedad se describe como una curvatura geométrica.
No obstante, los conceptos rigurosamente explorados en este libro, desde la cinemática hasta los principios variacionales, proporcionan una base teórica y metodológica indispensables para el desarrollo de futuros ingenieros y científicos, permitiéndoles afrontar desafíos más avanzados en campos como la mecánica, mecánica de materiales, mecánica cuántica, la re-

latividad o la física de partículas. El dominio de estos principios asegura la capacidad de analizar y modelar sistemas físicos de manera precisa y eficaz, como suele ocurrir en estas disciplinas. Me despido deseándoles buena suerte.